Proceedings CIEAEM 58 –SRNI, Czech Republic, July 9-15, 2006
"Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)", Supplemento n. 2, 2009.
G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy)

VALORISATION DU BACKGROUND DANS L'APPRENTISSAGE DES MATHEMATIQUES : APPROCHE CONCEPTIQUE.

Idriss J. Aberkane[1], Cédric Saule[2].
[1]Ecole Normale Supérieure (Paris), département de Biologie. 46 Rue d'Ulm 75005 Paris Cedex 05
[2]Université Paris-Sud XI (Orsay), département d'Informatique

Concept theory provides a wide model for the understanding of concept acquisition, conceptual change – including paradigm shift – and conceptual dynamic in general. For example the conceptic model (Aberkane 2004) suggests that ideas are formed in a generative manner, much like sentences in Chomskian grammars, and that the universe of all possible ideas is in a sense "algebraically" closed under mental operations, that is, any idea can be transformed into any other, however distant, after a finite number of mental operations. Mental operations are not Turing operations, essentially because they are not Russel-typed, when notably any concept of concept is another concept, and any set of ideas or meta-idea is still an idea. Here we apply the conceptic model to maths pedagogy, with the aim of increasing the bandwidth of knowledge transfer. We propose that any background can be efficiently diverted to learn mathematics or conversely, that any knowledge of any field being organized into a conceptual structure can be recruited to facilitate the appropriation of mathematical theories. We introduce the notion of conceptic filter (later filter), i.e. any combination of concepts that are linked to each other so that they form a usable theory to describe the fact that the filter of mathematics can be efficiently constructed by using any background as a priming filter.

1. INTRODUCTION

Les mathématiques sont plus que jamais nécessaires dans la recherche et les études scientifiques supérieures. Parallèlement, les autres sciences s'enrichissent constamment de nouveaux concepts qu'un chercheur doit également maîtriser.

Quels moyens pédagogiques peut-on utiliser pour permettre aux étudiants et aux chercheurs d'accéder efficacement aux mathématiques tout en demeurant des spécialistes de leur domaine ? Le problème n'est pas simple : il s'agit d'établir un pont entre des domaines très raffinés (par exemple la biochimie et les statistiques) et donc apparemment très éloignés.

Nous répondons à ce problème en utilisant une approche cognitive nouvelle : la conceptique. L'élément-clé de cette approche est qu'il est possible de passer d'un concept à un autre par des déformations non linéaires et qu'à ce titre la connaissance d'un concept facilite la connaissance d'autres concepts. Il a été montré que la compréhension d'un jeu vidéo pouvait améliorer la compréhension des mathématiques (Aberkane, 2005). Nous nous penchons maintenant sur la compréhension des mathématiques en valorisant n'importe quel *background*, nous désignons sous ce terme (background) l'ensemble des connaissances maîtrisées et utilisées d'une personne.

2. LE MODELE CONCEPTIQUE

Le modèle conceptique est hérité notamment de G. Cantor (1899) D. Hilbert (1899, 1901) K. Gödel (1974) et F. Varela (1987). Nous supposons qu'il existe une collection de tous les concepts possibles. Cette collection qui n'est ni un ensemble ni une catégorie, contient ***au moins tout ce qu'il est possible d'énoncer***, donc en particulier les mathématiques connues et inconnues mais énonçables, les concepts de la biologie et de la psychologie. Nous appellerons cette collection ***Univers Conceptique***. Une autre définition simple de l'Univers Conceptique, plus claire et plus accessible pour un mathématicien est ***le plus petit univers clos par toute opération de pensée***, c'est-à-dire le plus petit univers qui contient toute séquence arbitrairement longue ou transfinie de manipulations mentales. De façon intéressante, l'objet initial qui sert à construire l'univers conceptique n'a aucune importance. De même que dans la méthode de Von Neumann pour construire la suite des ordinaux en n'utilisant que des ensembles purs, on peut simplement utiliser l'ensemble vide comme point de départ à la construction itérative de l'Univers Conceptique.

Un modèle conceptique simplifié : le modèle AC (Aberkane, 2004) est énonçable comme suit :

Modèle AC

i. (initial) Tout concept est issu d'une ***Application Conceptique*** sur une ***interaction***.

ii. (applications) En plus de l'interaction, la cognition humaine dispose d'au moins cinq classes d'applications conceptiques qualitatives et non ordonnées en soi qui sont la ***restriction***, l'***association***, le ***déni***, l'***amplification*** et l'***admission***.

iii. (clôture générale) Tout concept de concept est un autre concept (en particulier toute collection de concept est un concept).

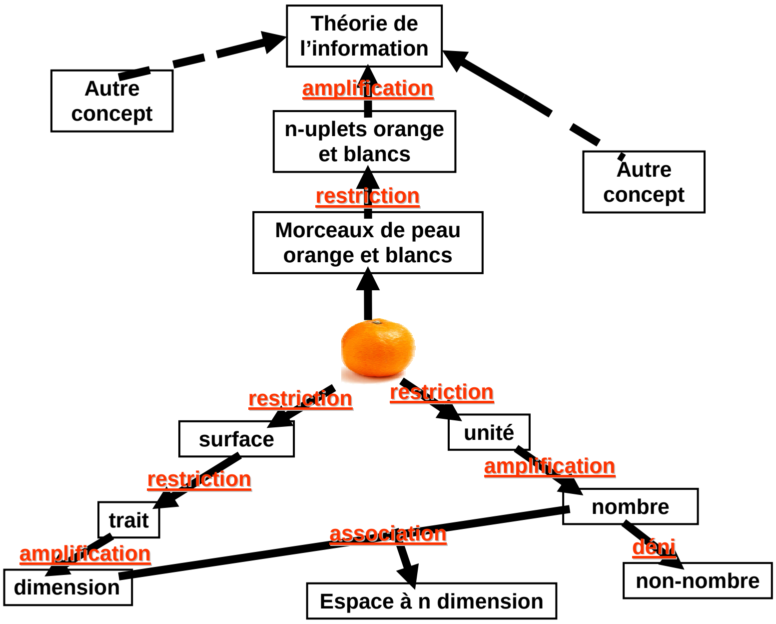

Figure 1. Toile conceptique issue d'une orange. Une cognition explore le champ des concepts possibles (l'Univers Conceptique) en ayant pour seul *input* l'interaction (perception) avec une orange.

Le modèle AC a été plutôt conçu dans une perspective cognitiviste, d'après les travaux de Francisco Varela ; il est un modèle large et ***non formel*** qui considère l'univers conceptique comme le champ de toutes les combinaisons d'applications conceptiques possibles. Les applications conceptiques (regroupées en cinq classes : Restriction, Association, Déni, Amplification, Admission) ne sont pas des fonctions définies formellement. Leur définition n'est qu'intuitive et ne peut faire l'économie d'un consensus (Fig. 1).
On remarquera que le modèle AC est génératif au sens où il permet de construire plusieurs concepts à partir d'une seule entrée.

Par exemple le concept d'*orange (objet)* est issu d'une interaction avec une orange. La restriction appliquée au concept d'*orange* peut fournir le concept d'*unité*, puis l'amplification le concept de *nombre* puis le déni le concept très abstrait de *non-nombre* (Fig. 1).

Malgré leur simplicité de fondement la conceptique et le modèle AC sont des théories qui posent des problèmes difficiles que nous ne pouvons pas discuter ici en détail. Nous nous contentons d'utiliser quelques unes de leurs conclusions pour mener notre étude.

Le modèle AC postule que tout concept peut être transformé en tout concept (Aberkane 2004, 2005). On suppose qu'il existe toujours un moyen cognitif de passer d'un concept à un autre, qu'importe sa probabilité effective. Les cinq classes d'applications conceptiques permettent par exemple de passer du concept de *nombre* au concept de *trait*.

Nous appèlerons ***distance conceptique*** le nombre minimum d'applications conceptiques qui sépare deux concepts. Plus cette distance est grande, plus il est difficile à une imagination (à un ***concepticiel***, c'est-à-dire strictement une machine de Turing non typée dont les opérations sont les applications conceptiques) d'accéder au second concept à partir du premier. En particulier plus la distance conceptique entre deux concepts est grande plus il est difficile d'expliquer l'un à partir de l'autre. La distance conceptique donne *a fortiori* une idée de la difficulté à établir un pont entre deux domaines.

3. LES FILTRES CONCEPTIQUES

Ce qu'en pédagogie on appelle un *background* (littéraire, de juriste, d'économiste…) est donc maintenant vu comme une collection de concepts liés entre eux (un lien étant également un concept). Le modèle AC introduit la notion de ***filtre*** conceptique (Aberkane 2005).

iv. Toute partie de l'Univers Conceptique est appelée **filtre**.

(*Nota* : parmi les propriétés de l'univers conceptique se trouve le fait que tout filtre est aussi un concept puisque les concepts ne sont pas typés (Gödel 1971) est donc que si l'univers conceptique était un ensemble il serait en bijection avec l'ensemble de ses parties).

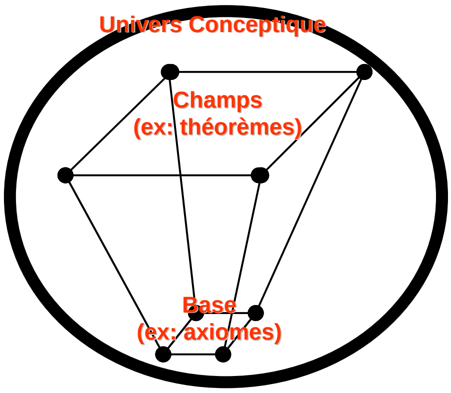

Figure 2. Un exemple de filtre : 8 concepts (représentés par des points) liés entre eux (les liens sont

Toute collection de concept est donc un filtre. Dans la pratique nous ne nous intéressons qu'à certains filtres seulement : par exemple les théories scientifiques, les œuvres littéraires, la perception des règles d'un jeu vidéo… Les filtres particuliers auxquels nous nous intéressons comprennent une *base* (par exemple des axiomes et une logique) et un *champ de déductions* (par exemple un champ de théorèmes déductibles des axiomes). Les connaissances actuelles sur la signalisation cellulaire forment un filtre. La logique floue forme un autre filtre. Et selon le modèle AC il est possible d'amener une cognition d'un filtre à un autre (Fig. 2).

Notre étude ramène le problème de l'enseignement des mathématiques en valorisant un *background* au problème de passer d'un filtre à un autre (Fig. 3). Le *background* représente la filtre de départ et les mathématiques le filtre d'arrivée. Il n'est pas nécessaire que les deux filtres contiennent autant de concepts. Le modèle AC postule qu'on peut accéder à tout filtre à partir de n'importe quel concept. Cependant, dans la pratique, la distance conceptique entre filtre de départ et filtre d'arrivée doit être suffisamment courte pour que le passage soit réalisable. Le passage d'un filtre à un autre relève essentiellement des capacités d'***analogie*** (i.e. dans le modèle AC : aptitude à exprimer un concept comme l'issue d'une ou de plusieurs application conceptique sur un autre concept).

4. INTERET EN PEDAGOGIE COGNITIVE

Il est nécessaire de distinguer ***filtre platonicien*** (par exemple : les mathématiques telles qu'elles sont) et ***filtre subjectif*** (par exemple : les mathématiques telles que quelqu'un les perçoit). Nous ferons cette distinction pour appliquer le modèle conceptique à la pédagogie des mathématiques.

Apprendre les mathématiques revient donc à construire un filtre subjectif en liant des concepts mathématiques entre eux et à d'autres concepts. Dans la pratique les filtres sont chevauchants : des concepts identiques sont utilisés pour comprendre des théories (des filtres) différentes. Lorsqu'un concept est compris, il l'est forcément parce qu'il a pu être dérivé de concepts déjà compris. Cela explique le fait que l'on soit capable d'expliquer et de définir un concept lorsqu'il est bien compris.

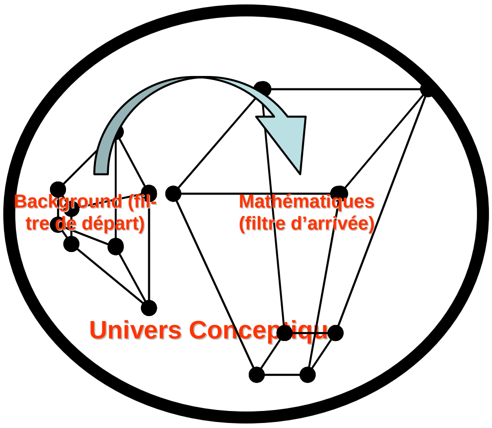

Figure 3. Il est possible d'apprendre les mathématiques (i.e. construire un filtre des mathématiques) en utilisant ses connaissances initiales même si elles n'ont aucun rapport social avec les mathématiques.

Dans l'enseignement des mathématiques le professeur doit faire parcourir une grande distance conceptique à la cognition de ses élèves, ce qui prend du temps et laisse de nombreux concepts mal compris. Il est cependant possible d'amener les élèves à exprimer eux-mêmes les concepts mathématiques en fonction des concepts qu'ils maîtrisent déjà (leur *background*).

D'un genre nouveau, la pédagogie basée sur la compréhension des filtres pourrait permettre d'enseigner rapidement et efficacement des domaines très élaborés des mathématiques en valorisant au mieux les connaissances initiales. Nous posons ici les bases de cette pédagogie et les bases d'une approche expérimentale visant à mettre son bien-fondé en évidence.

(Nota : nous ne parlons plus maintenant qu'en terme de ***filtres subjectifs***.) Prenons pour filtre de départ la collection de concepts liés entre eux dont dispose un diplômé (*graduate student*) en biologie et pour filtre d'arrivé une partie des mathématiques. Dans un premier temps il s'agit de tester l'***état*** du filtre de départ. Le terme ***état*** regroupe plusieurs notions comme la ***prégnance***, la ***cohérence*** et l'***autonomie conceptique***.

La ***prégnance*** d'un filtre est vue comme la tendance d'une personne à se placer dans ce filtre, *a fortiori* cela est reflété par la tendance à faire appel à ce filtre pour expliquer un nouveau concept (le sujet a tendance à expliquer un maximum de concepts en s'appuyant sur la biologie).

La ***cohérence*** d'un filtre est vue comme la tendance du sujet à utiliser des parties de ce filtre pour en expliquer d'autre (le sujet a relié ses connaissances de la biologie entre elles, il ne sépare pas les connaissances en domaines distincts).

L'***autonomie conceptique*** est une notion nouvelle du modèle AC, elle est définie comme la capacité à appliquer librement un maximum d'applications conceptiques à un minimum de concepts, c'est-à-dire par exemple à parcourir la plus grande distance conceptique possible. L'autonomie conceptique est un des traits du génie en ceci qu'elle caractérise la capacité à évoluer dans l'univers conceptique, par exemple elle caractérise le sujet qui découvre la théorie de l'information à partir d'une orange (Fig. 1).

On notera que les méthodes d'examen actuelles dans l'enseignement supérieur se concentrent surtout sur la *cohérence*, n'analyse pas la *prégnance* et tendent à sanctionner l'*autonomie conceptique*.

Par la suite il faut tester l'aptitude du sujet à passer d'un filtre à l'autre, ce qui revient à faire passer le sujet d'une structure de concepts de la biologie à une structure de concepts des mathématiques. L'étude serait finalisée par la mise à l'épreuve de l'***état*** du filtre d'arrivé (ici : les notions mathématique enseignées)

Voici une description verbalisée du passage d'un filtre à un autre (Fig. 4) :

Un biochimiste a de bonnes connaissances du reploiement des collagènes. Il sait qu'elles appartiennent à une classe d'objets : les protéines et que tous les éléments de cette classe ont des propriétés communes. Ce biochimiste sait également que certaines protéines et certains polymères (associations) de protéines ont des propriétés connues qui doivent être expliquées d'après les propriétés chimiques de base de toutes les protéines. Ce biochimiste dispose donc d'un filtre *cohérent* qui lie entre eux plusieurs concepts (biochimie, protéine, collagène, comportement, déduction, propriété, ensemble). Chacun des concepts du filtre peut également être approfondi (le concept « biochimie » est également un filtre : celui du comportement des objets biochimiques…). Si ce biochimiste étudie l'analyse mathématique, il devra se construire un filtre comprenant par exemple les concepts : fonction, comportement, classe, ensemble, fonction particulière, fonction de fonction…). Notre étude affirme que le filtre de la biochimie des protéines (e.g : chimie, protéine, comportement, déduction, propriété, ensemble…) peut être utilisé pour dériver des concepts-clés – ainsi que leur structuration en groupe – du filtre de l'analyse. En bref, le biochimiste peut comprendre les mathématiques par analogie entre protéine, collagène et fonction, fonction harmonique, etc.

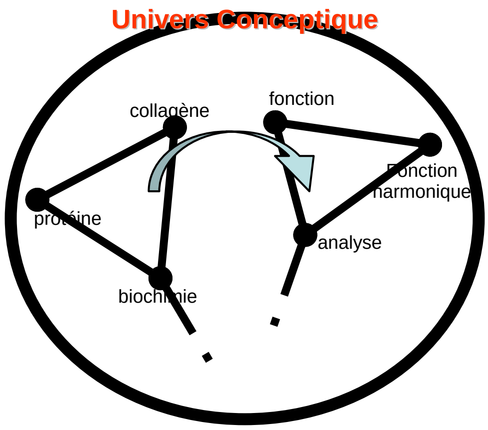

Figure 4. Un filtre pour comprendre les protéines peut être transformé en filtre pour comprendre les mathématiques.

Il est important de noter que la méthode que nous proposons ne sert qu'à dériver des concepts. Nous facilitons l'apprentissage des mathématiques en dérivant leur concepts-clé des concepts du background. La **rigueur**, quant à elle, ne peut être transformée de la même manière.

Enfin nous signalons qu'une brillante étude de Dehaene *et al* (2006) a déjà déployé un protocole de psychologie expérimentale pour explorer plusieurs filtres empiriques des mathématiques (géométrie et topologie) chez un groupe d'indiens *Munduruku* d'Amazonie. L'étude est arrivée à la conclusion que les fonctions de conceptualisation humaines ont une intuition innée (présente en l'absence d'éducation) des notions mathématiques à la base de la géométrie.

5. CONCLUSION

Les modèles de la pédagogie cognitive doivent trouver des réponses au problème d'enseigner des disciplines de plus en plus complexes et de plus en plus riches. Le modèle des filtres conceptique propose des solutions et suggère de nouvelles méthodes d'enseignement pour permettre à des experts d'une discipline d'apprendre plus facilement une autre discipline en valorisant au mieux leur *background*. Les perspectives offertes par le modèle que nous proposons sont très loin d'être explorées. Nous pensons également que le fait de valoriser ses connaissances initiales dans l'apprentissage, outre le gain de temps qu'il représente, permet de renforcer la solidité desdites connaissances ainsi que la créativité. Nous attirons ainsi l'attention sur le fait que le modèle des filtres conceptiques répond à des problématiques ouvertes du *Knowledge Management*.

REFERENCES

- Aberkane I. J. (report) Univers Conceptique, *mémoire d'étude*. Université Paris XI (2004).
- Aberkane I. J. Détournement du jeu vidéo à des fins pédagogiques : l'affect, l'acquisition de règles et la compréhension d'un système de règles. *Proceedings of the CIEAEM 57, 144-152*. (2005).
- Aberkane I. J. (conférence) Conceptique et P-logique, deux approches complémentaires dérivées des travaux de Hilbert, Gödel et Varela, *conférence présentée à L'université Lille 3 auprès de Rahman S. (jan.2006)*.
- Cantor G. Correspondence with Dedekind, 843-77, 930-40. (1872-82, 1899)
- Ewald, William B., ed., 1996. From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics, 2 vols. Oxford Uni. Press. (1996)
- Frege G On sense and reference. In P. Geach and M. Black, Eds., Translation from the philosophical writings of Gottlob Frege. *Oxford: Blackwell*. (1954)
- Fodor, J. A. The modulariry of mind. *Cambridge (Mass.): MIT Press*. (1983)
- Fodor, J. A. Concepts – a pot boiler. *Cognition 50: 95-113* (1994)
- Osherson, D. N., Smith E.E. On the adequacy of prototype theory as a theory of concepts. *Cognition 11:35-58*. (1981).
- Rosch, E. Cognitive representations of semantic categories. *Journal of Experimental Psychology: General 104: 192-232*. (1975)
- Collins J., Porras J. Built to last, *New York: Harper Collins* (1997)
- Dehaene S, Spelke E, Pinel P, Stanescu R, Tsivkin S. Sources of mathematical thinking: behavioral and brain-imaging evidence. *Science*. 1999 May 7; 284(5416):970-4. (1999)
- Dehaene S, Izard V, Pica P, Spelke E. Core Knowlege of Geometry in an Amazonian Indigen group. Science 2006 Jan 20, 311: 381-4 (2006)
- Gödel K. d'après Wang H. Reflections on Kurt Gödel, *Cambridge (Mass.): MIT Press* (1987); Wang H. From Mathematics to Philosophy, *New York: Humanities Press* (1976)
- Wang H. A logical journey: From Gödel to philosophy, *Cambridge (Mass): MIT Press* (1997)
- Hilbert D. d'après Blumenthal, Lebensgeschichte *in* Hilbert [1931-5, t. III, particulièrement: p.417
- Koedinger K.R., Nathan M.J., The Real Story Behind Story Problems: Effects of Representations on Quantitative Reasoning, *Journal of the Learning Sciences*, 2004, Vol. 3, No. 2, Pages 129-164. (2004)
- Rittle-Johnson B., Koedinger K. Designing Knowledge Scaffolds to Support Mathematical Problem Solving, *Cognition and Instruction*, 2005, Vol. 23, No. 3, Pages 313-349. (2005).
- Sweller J. Cognitive Load Theory, learning difficulty, and instructional design. *Learning and Instruction* 4: 295-312. (1994)
- Sweller J; Chandler. Why Some Material Is Difficult to Learn. *Cognition and Instruction* 12:3, 185-233. (1994)
- Brunken R., Plass J.L., Leutner Detlev Direct Measurement of Cognitive Load in Multimedia Learning, Educational Psychologist, 2003, Vol. 38, No. 1, Pages 53-61. (2003),
- O'Neil H.F., Wainess R., Baker E.L., Classification of learning outcomes: evidence from the computer games literature, Curriculum Journal 16:4, 455. (2005)
- Paas F., Tuovinen J.E., Tabbers H., Van Gerven P.W.M., Cognitive Load Measurement as a Means to Advance Cognitive Load Theory, Educational Psychologist, 2003, Vol. 38, No. 1, Pages 63-71. (2003)
- Mayer R., Moreno R., Nine Ways to Reduce Cognitive Load in Multimedia Learning, Educational Psychologist, 2003, Vol. 38, No. 1, Pages 43-52. (2003)
- Kalyuga S., Ayres P., Chandler P., Sweller J., (2003), The Expertise Reversal Effect, Educational Psychologist, 2003, Vol. 38, No. 1, Pages 23-31.
- Varela F. Autonomie et Connaissance. *Paris: Seuil* (1989) Trad: Dumouchel P. Bourgine P.

Correspondance should be adressed to I.J.A idriss.aberkane@ens.fr