

L'intersections des arbres 2-3-4-aires complets sur \mathbb{N} forme un *repère* et construit une solution au problème de Syracuse

Idriss J. Aberkane

12 janvier 2020

Résumé

L'étude des orbites de Syracuse dans un objet algébrique nouveau qui est l'intersection des arbres binaire, ternaire et quaternaire, révèle des régularités non-triviales qui permettent d'ébaucher un programme de résolution en exposant de nombreuses vulnérabilités dans le problème. Notamment, le long de toute branche impaire de l'arbre binaire complet, pour tout nombre a muni du suffixe 1 en base 2, soit a fusionne avec $a1$ si a peut s'écrire $b1$ en base 4 et que b est pair, soit $a1$ fusionne avec $a11$, si a peut s'écrire $b1$ en base 4 et que b est impair. Dans les deux cas ce comportement se poursuit alternativement et indéfiniment le long de la branche. On a donc le long de toute branche impaire de l'arbre binaire une paire de nombres sur deux qui fusionne, et finaliser un programme connectant les autres paires le long d'une même branche résout Syracuse. L'étude des intersections de l'arbre ternaire complet avec celles des arbres binaire et quaternaire permet d'établir un tel programme.

1 Présentation du programme

Le terme Algèbre, de l'arabe *Al Jabr* (الجبر) porte étymologiquement le sens de "relier ce qui est séparé", et il ne peut être plus exact pour attaquer le fascinant problème de Syracuse qui par l'action $3n + 1$, est un **cisaillement oblique** des branches impaires de l'arbre binaire complet. L'équipement usuel pour attaquer le problème sous cet angle est celui de l'arithmétique modulaire et donc de l'étude des classes résiduelles, par exemple autour de considérations algébriques sur le semigroupe $3x + 1$. Notre intention cependant est d'abord de produire un effort théorique en direction d'une **théorie de Galois diophantienne**, c'est-à-dire que nous invoquons un objet algébrique plus large, l'intersection des arbres binaire, ternaire et quaternaire complet sur \mathbb{N} (qui est donc aussi équivalent à une problématique de changement de base) pour obtenir des résultats non triviaux sur la connexité et en particulier la convergence des orbites d'un système dynamique discret.

La totalité du comportement chaotique des orbites de Syracuse est codée par la façon dont l'action $3n + 1$ cisaille obliquement les branches impaires de l'arbre binaire complet sur \mathbb{N} , et nous pouvons décrire cette façon avec une grande précision.

En premier lieu, définissons l'intersection d'arbres d'arité a et b sur \mathbb{N} comme le **Romanesco** $(a;b)$. Nos résultats initiaux portent sur la régularité des orbites de Syracuse sur le Romanesco $(2;4)$ que l'on peut voir comme un cristal de nombres entiers ou une superposition de graphes sur \mathbb{N} (et si l'on pousse chaque branche à l'infini, on engendre \mathbb{R}). Il est représenté dans la **Figure 1**.

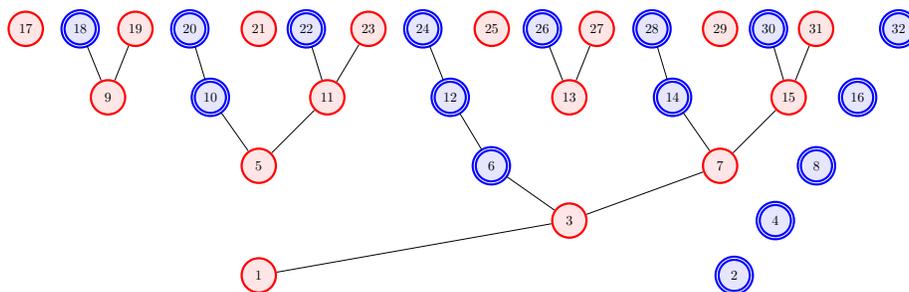


Figure 1. Une représentation du Romanesco $(2;4)$ de 2^0 à 2^5

Représenter le Romanesco $(2;4)$ plutôt que le simple arbre binaire complet sur \mathbb{N} , il suffit de rendre facilement lisibles les opérations $4n+1$ et $4n+3$, donc de manipuler les alignements sur l'arbre binaire complet afin de voir en un coup d'oeil quel nombre peut s'écrire comme le $4n+1$ d'un autre. Comme les opérations fondamentales de l'arbre quaternaire sont

$$\begin{aligned} &\cdot 4 \\ &\cdot 4 + 1 \\ &\cdot 4 + 2 \\ &\cdot 4 + 3 \end{aligned}$$

et que celles de l'arbre binaire sont

$$\begin{aligned} &\cdot 2 \\ &\cdot 2 + 1 \end{aligned}$$

L'opération $\cdot 4 + 1$ qui est une composition des deux opérations fondamentales de l'arbre binaire sera visualisée plus facilement par un seul alignement (qui n'est pas

naturel dans l'arbre binaire), et on la représentera à la *verticale* du nombre sur lequel elle agit. Dans la **Figure 1** on représente donc par exemple 5 à la verticale de 1 et 21 à la verticale de 5. Nous représentons les puissances pures de 2 à droite, mais elles sont les sous-verticaux des nombres 9 et 17.

Nous pouvons donc définir l'action $V(n) = 4n + 1$ et on définira sa réciproque quand elle existe dans les naturels, comme $V^{-1}(n)$. Pratiquer l'arithmétique modulaire de Syracuse sur un Romanesco consiste en un aller-retour permanent entre les caractéristiques géométriques d'un nombre et les conséquences de l'action de Syracuse sur lui pour établir des relations de congruence. Dans le Romanesco (2;4) on a noté les nombres pairs en bleu et les impairs en rouge, et on conservera cette convention dans les propos algébriques : un nombre est dit **Vertical rouge** s'il peut s'écrire comme $V(n)$ où n est impair, et **Vertical bleu** s'il peut s'écrire comme $V(n)$ pour n pair. Les propriétés "Vertical bleu" et "Vertical rouge" sont des fondamentaux de l'algèbre romanescque de la dynamique de Syracuse ; en effet, il est d'ores et déjà simple d'observer que si un nombre est le vertical d'un impair, alors il lui est congruent. **Noter que pour simplifier on définira toujours $Syr(n)$ comme "le prochain impair dans l'orbite de n ".**

$$5 \equiv 1 \equiv 21 \text{ car } Syr(1) = Syr(5) = Syr(21)$$

1.1 Topologie modulaire du Romanesco (2;4)

Définissons quelques opérations fondamentales :

- L'opération **Vertical** est donc définie comme $V(n) = 4n + 1$. Elle consiste à ajouter le chiffre 1 en suffixe du nombre n en base 4. On définira la **verticalité** d'un nombre par le nombre de fois qu'il résulte de l'opération V (le plus souvent, zéro donc, puisque seul un naturel sur quatre est vertical). Le nombre 21 a une verticalité impaire de 2 puisqu'il est vertical du vertical de 1, mais comme 1 est le vertical de 0, qui est pair, on dira parfois, pour préciser, que 21 a une verticale totale de 3 mais de *fondbleu* (ce détail aura une grande importance dans les calculs avancés). 13 par contre, est 1-vertical de fond rouge.
- L'opération **Successesseur** est définie comme $S(n) = 2n + 1$. Elle consiste à ajouter le suffixe 1 au nombre n en base 2. On définira le **rang** ou la **successalité** d'un nombre n comme le nombre de chiffres 1 finaux successifs de sa notation en base 2.
- L'opération **Glacis** est définie comme $G(n) = 2n - 1$. On définira la **glacialité** d'un nombre comme le nombre de fois qu'il est le fruit de l'opération G sur un nombre vertical rouge. Si un nombre n'a pas de vertical sa glacialité est définie à -1 , et s'il est vertical rouge, elle est définie à 0

Toutes les réciproques de ces opérations assumeront par défaut "quand elle existe". Par exemple l'opération $S^{-1}(n)$ qui consiste à retirer le chiffre final 1 de la notation du nombre n en base 2 n'opère que si ce chiffre existe.

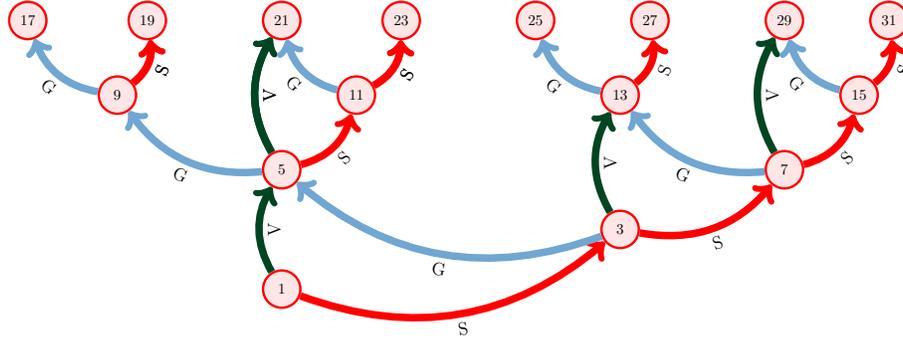


Figure 2. Représentation des opérations V, G et S sur les impairs de 1 à 31. On munit donc l'ensemble $2\mathbb{N} + 1$ de deux opérations unaires non commutatives et sans inverse qui soit définie sur tout l'ensemble avec $S \circ G = V$

Les **nombre de Mersenne** sont donc définis par une succession de l'opération S sur le nombre 0, donc comme des nombres s'écrivant comme une succession finie du chiffre 1 en base 2. D'une façon générale, toute série de l'opération S dans le *Romanesco*(2;4) s'appellera une **branche rouge**. Les nombres de Mersenne forment la branche rouge prototype, et on peut déjà noter que l'action Syr les envoie sur la branche rouge qui commence par 5. Le Mersenne 3 va vers 5, le Mersenne 7 va vers 11, et d'une façon générale si un nombre n a au moins deux chiffres 1 terminaux en base 2, $S(Syr(n)) = Syr(S(n))$. Syr et S sont **localement commutatives dans le Romanesco (2;4)**.

Nous dirons que les Mersenne sont une **branche rouge de racine 1** et de **déterminant 1**. Comme l'arbre binaire complet sur \mathbb{N} est autosimilaire, tout impair de rang 1 génère à nouveau une branche de construction semblable aux Mersenne donc plus généralement on décrira :

- la **racine** d'une branche rouge est son plus petit élément r qui se termine par le chiffre 1 en base 2. Toute racine s'écrit donc comme $r = S(n)$ où n est pair.
- le **déterminant** d'une branche rouge est le résultat de l'opération $G^{-1}(r)$ soit $\frac{r+1}{2}$, qui est bien définie sur tout r puisque toute racine est de successalité 1.

Pour tout nombre impair n on définira le **glacis de fond n** comme la suite de l'opération G sur n . Le premier glacis de l'arbre binaire complet est celui de fond 1, qui correspond aux puissances de 2 auxquelles on ajoute 1 : 5, 9, 17, etc. Tous les nombres de glacis n'ont donc qu'un seul chiffre final 1 en base 2 et une succession de chiffres 0 à gauche de ce chiffre qui est proportionnelle à leur hauteur dans le glacis. Tous les nombres de branche rouge ont, eux, une succession de chiffres 1 en base 2 qui est proportionnelle à leur hauteur dans la branche.

1.2 Topologie modulaire du Romanesco (2;3;4)

Il est facile de démontrer que la dynamique de Syracuse (dans le sens *Syr* que nous avons défini, c'est-à-dire "le prochain impair de l'orbite") d'un nombre de branche rouge qui n'est pas un nombre de glacis est toujours croissante, et que la dynamique d'un nombre de glacis est toujours décroissante. Comme on l'a dit aussi, la dynamique de Syracuse "cisaille" les branches rouges comme on l'observe quand elle envoie 3, dont le rang est 2 sur 5, qui est un nombre de glacis donc de rang 1. Et comme, pour tout nombre de rang 2 ou plus, on a $Syr(S(n)) = S(Syr(n))$ si l'image de 3 par Syracuse perd un rang, l'image de $S(3)$ aussi.

Ceci se prouve tout simplement en observant que l'image de tout nombre n de rang 2 dans une branche de déterminant r par Syracuse est égale à $G(3r)$, autrement dit, tout 1 - *successeur* d'un nombre de glacis est envoyé dans un autre glacis, à gauche du triple du déterminant de sa branche. Cette observation, qui se démontre aussi facilement, suffit à démontrer que chaque action *Syr* sur un nombre de rang n l'envoie sur un nombre de rang $n - 1$ et qu'en conséquence Syracuse réduit finiment tout nombre qui n'est pas vertical à un nombre qui le sera, et il sera, selon que l'on progresse par l'opération S dans la branche, alternativement soit vertical bleu soit vertical rouge; si la réduction finie de a de rang n au premier impair de rang 1 b est verticale rouge, alors celle de $S(a)$ sera verticale bleue.

On peut donc calculer directement le premier impair de rang 1 dans l'orbite de tout impair n de rang k supérieur à 1, en lui faisant subir l'opération suivante qui comprime simplement toute phase ascendante des orbites de Syracuse :

$$((n + 1) \cdot (\frac{3}{2})^{k-1}) - 1$$

Pour un Mersenne - prenons 31 par exemple dont le rang est 5 puisqu'il s'écrit 11111 en base 2 cela consiste à l'envoyer sur son premier pair à droite, dont la puissance de 2 permet d'opérer l'action $\frac{3}{2}$ exactement autant que son *rang* et autant que son *rang* - 1 pour obtenir un nombre pair par ce processus, ce qui nous donne le pair 162, auquel on soustrait 1, 161 est effectivement un nombre de glacis et il se trouve être vertical bleu puisque $161 = V(40)$, ce qui prouve d'ailleurs que $31 \equiv 63$; on peut calculer plus directement que 161 est le premier impair de rang 1 dans l'orbite de 31 parce que 31 est de rang 5 dans la branche de déterminant 1 et donc son premier impair de rang 1 s'écrit $G(1 \cdot 3^4)$. Si nous avons pris les Mersenne en exemple, cette démarche s'applique bien sûr à toutes les branches rouges.

On peut donc compresser les orbites de Syracuse en les représentant un peu à la manière d'un espace vectoriel discret : chaque impair de rang 2 ou plus est fléché sur l'ajout de la moitié de son +1, itéré autant de fois que son *rang* - 1, le tout -1, ou de façon équivalente, sur le premier glacial à gauche du déterminant de sa branche multiplié par $3^{(rang - 1)}$. Si l'on voulait essayer de représenter cette dynamique discrète dans un langage plus réminiscent de celui des systèmes dynamiques continus on définirait des opérateurs de différenciation locaux, définis selon les bases numériques dans lesquels ils opèrent (ou de façon équivalence, dans la dimension correspondante si l'on considère le

(Romanesco 2;3;4) comme un *repère*). Nous noterons ces opérateurs par la lettre *Dal* en arabe.

1.3 Transposer le formalisme des systèmes dynamiques continus sur Syracuse : vers une différenciation diophantienne

L'opérateur $\mathfrak{D}_2^1(a)$ rend, pour tout impair a , un vecteur à deux dimensions donnant le nombre de ses chiffres 1 consécutifs en base 2 **moins 1** (donc le rang de a moins 1) et sa racine. Tout nombre a s'écrivant $r \underbrace{1 \dots 1}_n$ en base 2 est partiellement dérivé par l'opérateur \mathfrak{D}_2^1

$$(a) = \begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix}$$

$\mathfrak{D}_2^1(a)$, quand son premier argument est supérieur à 1, conditionne effectivement la **pen**te de la droite qui relie le nombre a au prochain impair de rang 1 qui est son image par Syracuse et donc **au prochain point d'inflexion de son orbite ascendante**. A chaque impair a de \mathbb{N} en effet, on peut associer un vecteur, soit ascendant soit descendant. **Tous les vecteurs ascendant de Syracuse ont une norme qui n'est conditionnée que par \mathfrak{D}_2^1 .**

Il n'y a en fait, dans Syracuse, que des phases ascendantes en (+1, puis $(\frac{3}{2})^{\text{rang}-1}$ puis -1) qui sont celles des nombres de branche, et que des phases descendantes en $\frac{3}{4}$ qui sont celles des nombres de glaciais. En effet, tout nombre n de glacialité supérieure à 0 a pour prochain impair dans son orbite de Syracuse :

$$(n-1) \cdot (\frac{3}{4}) + 1$$

D'une façon générale, les descentes de glaciais suivent la progression suivante : tout nombre n de glacialité paire g dans un glaciais de fond f progresse vers un nombre de glacialité 0 qui est égal à :

$$V(f \cdot 3^{\frac{g}{2}})$$

et tout nombre n de glacialité g impaire dans un glaciais de fond f progresse vers un nombre de glacialité -1 qui est égal à :

$$S(f \cdot 3^{\frac{g+1}{2}})$$

Dans les deux cas respectivement selon les progressions

$$(n-1) \cdot (\frac{3}{4})^{\frac{g}{2}} + 1$$

et

$$(n-1) \cdot (\frac{3}{4})^{\frac{g+1}{2}} + 1$$

selon que g est pair ou impair.

Poursuivons la différenciation partielle dans l'arbre binaire. L'opérateur $\mathfrak{D}_2^0(a)$ rend pour tout impair a , le vecteur donnant le fond du glaciais et la glacialité (le nombre de chiffres 0 consécutifs à gauche de son digit 1 final en base 2 et le nombre à gauche du dernier chiffre zéro).

Pour un nombre a s'écrivant comme $f \underbrace{0 \dots 0}_h 1 \mathfrak{D}_2^0(a) = \begin{bmatrix} h-1 \\ f \end{bmatrix}$

...comme par convention on a défini qu'un vertical rouge est de glacialité zéro alors qu'il finit bien toujours par un seul chiffre 0 à gauche de son suffixe 1 en base 2, le premier argument de $\mathfrak{D}_2^0(a)$ est $h-1$.

Quand g est impair, le point d'inflexion de la phase descendante du nombre glaciaire est le **Successeur** d'une puissance de 3 de son fond, quand il est pair c'est le **Vertical** d'une puissance de 3 du fond. Tout glacis est donc une alternance de nombres de variétés "V" ou "S" dans le sens que l'issue de leur progression décroissante est soit le vertical soit le successeur d'un nombre impair qui finit par 0 en base 3 (il est divisible par 3 donc on dira en fin de cet article qu'il est *ter*).

On étudie donc systématiquement la dynamique de Syracuse dans trois dimensions (binaire, ternaire, quaternaire), dont les opérateurs $\mathfrak{D}_d^c(x)$ sont en quelque sorte des dérivées partielles adaptées au monde modulaire : les phases ascendantes de Syracuse combinent la base 3 et la base 2 puisqu'elles sont en $\frac{3}{2}$ et les phases descendantes combinent la base 3 et la base 4 puisqu'elles sont $\frac{3}{4}$ et en tout point on peut calculer une paire de dérivée à deux dimensions dont, dans la première, l'une est nulle si l'autre ne l'est pas (le premier terme de $\mathfrak{D}_2^0(a)$ est nul si a est successal rouge ; celui de $\mathfrak{D}_2^1(a)$ est nul si a est dans un glacis)

Si les phases ascendantes et descendantes des orbites de Syracuse se repèrent dans le Romanesco (2;3;4) quand nous posons par exemple la question de la **verticalité (base 4) des puissances de 3 (base 3) des impairs (base 2)**. Encore une fois, il n'y a **aucune** dimension du comportement chaotique des orbites de Syracuse qui ne soit réductible à cette question et c'est bien pour cette raison que le Romanesco (2;3;4) forme un repère puissant à la résolution du problème.

Les nombres de branche progressent vers le G d'une puissance de 3 de leur déterminant qui est proportionnelle à leur rang-1, les nombres de glacis progressent vers le Vertical ou le Successeur d'une puissance de 3 du fond de leur glacis qui est proportionnelle à leur glacialité.

- L'image du successeur d'un vertical rouge n de fond bleu par Syracuse (11 par exemple) est un nombre de glacis de **variété V** dont la glacialité est proportionnelle à la verticalité de n
- L'image du successeur d'un vertical rouge de fond rouge par Syracuse (27 par exemple) est un nombre de glacis de **variété S** dont la glacialité+1 est proportionnelle à la verticalité de n

Noter que c'est prédire de quelle manière l'opération de Syracuse amène un nombre de rang 2 ou plus au successeur d'un vertical (et de prédire exactement cette verticalité) qui constitue un des deux coeurs de la chaotité des orbites, l'autre étant la successalité et la verticalité des puissances de trois des fonds de glacis.

Noter aussi que toutes ces formulations nouvelles ("successalité d'une puissance de trois" ; "vertical de fond bleu" etc.) sont des expressions naturelles de coordonnées dans le Romanesco (2;3;4). On leur associe des opérateurs correspondants ; si l'on a déjà vus les opérateurs de la **successalité** (\mathfrak{D}_2^1) et de **glacialité** (\mathfrak{D}_2^0) nous ajoutons celui de la **verticalité** dans son sens pratique (l'information importante pour le calcul romanescque est le nombre d'opérations V sur un **impair** et si cet impair est lui-même vertical bleu ou successal)

L'opérateur $\mathfrak{D}_4^1(a)$ rend, pour tout impair a , un vecteur à deux dimensions donnant le nombre de ses chiffres 1 consécutifs en base 4 s'ils sont à droite d'un chiffre 3 et ce nombre moins 1 s'ils sont à gauche d'un chiffre 0 ou 2. Donc pour un nombre a qui s'écrit $f \underbrace{1 \dots 1}_v$ en base 4, où f finit par le chiffre 3 dans la même base,

$$\mathfrak{D}_4^1(a) = \begin{bmatrix} v \\ f \end{bmatrix}$$

Et pour un nombre a qui en base 4 s'écrit $f \underbrace{1 \dots 1}_v$ où f finit par le chiffre 0 ou 2,

$$\mathfrak{D}_4^1(a) = \begin{bmatrix} v - 1 \\ f \end{bmatrix}$$

Pour tous les opérateurs Dal on rendra toujours en base 10 le fond (du vertical ou du glacis) ou la racine de la branche pour simplifier la lisibilité. Si on peut maintenant différencier la dynamique de Syracuse par parties, ce qui est difficile c'est d'établir des implications entre opérateurs Dal autrement que par morceaux. Par exemple

$$\mathfrak{D}_4^1(a) = \begin{bmatrix} v_1 \\ f_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{D}_2^1(f_1) = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$$

Alors

$$\mathfrak{D}_4^1(3^n \cdot (S(f))) = \begin{bmatrix} v_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

Comprendre le sens et les implications des théorèmes suivants permet de se familiariser encore davantage avec l'algèbre romanesque :

- Si un nombre n est vertical rouge, alors aucune de ses puissances de trois n'est verticale bleue, et toutes ses puissances paires de 3 sont verticales rouges, toutes ses puissances de 3 impaires sont de rang 2 ou plus.
- Si un nombre n est vertical bleu, alors aucune de ses puissances de trois n'est verticale rouge, et toutes ses puissances paires de 3 sont verticales bleues, toutes ses puissances de 3 impaires sont de rang 2 ou plus.
- Si un nombre n peut s'écrire comme $V^m(a)$ où a est soit pair soit de rang 2 ou plus, alors $3n$ s'écrit comme $S^{2m}(b)$ où b est pair.

2 Résultats avancés

Tout l'objet de théoriser une algèbre est de pouvoir en tirer des calculs systématiques et des algorithmes. Les calculs les plus intéressants dans Syracuse sont bien sûr ceux qui établissent des congruences (que deux nombres ont un commun dans leur orbite, donc qu'ils sont

finiment équivalents pour la dynamique de Syracuse). Quant aux algorithmes issus de l'algèbre Romanesque, leur objectif est d'établir ces résultats de congruence sur des séries infinies.

Nous avons commencé par des équivalences simples, celles des Verticaux :

$$1 \equiv 5 \equiv 21 \text{ car } Syr(1) = Syr(5) = Syr(21)$$

En effet $5 = V(1)$ et $21 = V(5)$

Produisons à présent des équivalences plus complexes.

- Si un nombre n est vertical bleu, alors $n \equiv S(n)$ et $S^k(n) \equiv S^{k+1}(n)$ pour tout k pair.
- Si un nombre n est vertical rouge, alors $S(n) \equiv S^2(n)$ et $S^k(n) \equiv S^{k+1}(n)$ pour tout k impair.

Ces deux théorèmes découlent des précédents et de la topologie modulaire du Romanoesco (2;3;4). En effet, d'une part les nombres de branches rouges progressent vers le glacial d'une puissance de 3 du déterminant de leur branche, d'autre part ces puissances de trois sont soit verticales soit successales, une fois sur deux, et on peut prouver ainsi, une fois sur deux, que deux nombres qui étaient successeur vont se retrouver finiment à la verticale l'un de l'autre et ainsi qu'ils sont équivalents.

Le long de toute branche rouge de l'arbre binaire complet donc, il existe toujours une fois sur deux une relation d'équivalence entre un nombre et son successeur. Dès lors, quiconque peut "raccomoder" les paires qui n'ont pas cette relation d'équivalence résout Syracuse, et c'est là que le terme *Al Jabr* (الجبر) se révèle seoir le plus exactement à l'Algèbre Romanesque.

Mais que faut-il raccomoder au juste ? Le mécanisme qui se produit quand un nombre et son successeur ne sont pas reliés par cette relation d'équivalence régulière, est soit que ce nombre est vertical rouge, soit que l'action de Syracuse l'envoie finiment sur un vertical rouge. La conséquence est que son successeur aboutit dans un glacis alors que lui devient congruent au fond du glacis. Nous avons appelé ce phénomène par lequel une paire connexe dans l'arbre binaire est séparée le long d'un glacis une **Avalanche**

Par exemple 3 et 7 ne sont pas démontrés congruents par l'équivalence régulière, parce que l'image de 3 est 5, qui est vertical rouge, et celle de 7 est donc $S(5) = 11$. L'avalanche que subit la paire (5; 11) est donc que 5 congrue au fond du glacis 1 et que 11 se retrouve dans le glacis 1, son image étant 17.

On appelle toute paire $(a; S(a))$ où a est vertical rouge un **bourgeon** (on a choisi ce nom parce que dans l'arbre, c'est la première pousse d'une tige verticale). Quiconque peut raccomoder les bourgeons résout Syracuse, car toute paire $(a; S(a))$ où a est de rang 2 ou plus et qui n'est pas démontrée congruente par l'équivalence régulière est finiment ramenée à un bourgeon. Il n'est d'ailleurs pas nécessaire de résoudre tous les bourgeons pour résoudre Syracuse, mais seulement ceux dont la notation en base 3 se termine par le chiffre 2.

L'arbre ternaire complet en effet est caractérisé par les actions suivantes :

- $A(n) = 3n+2$. Nous l'appelons A parce qu'elle est en réalité la plus simple pour déterminer le Syr^{-1} d'un nombre : si un nombre impair a finit par 2 en base 3 alors il existe un nombre n tel que $2a = 3n + 1$. On dira d'un nombre issu de l'opération A qu'il est "**de type A**".

- $B(n) = 3n$, les impairs issus de cette opération n'ont pas d'antécédent direct dans Syracuse, mais on peut en obtenir de leur $4x + 1$ ou de leur successeur s'ils lui sont équivalent. Nous appelons ces nombres qui sont divisibles par 3 "de type B".
- $C(n) = 3n + 1$. Dans la mesure où ces nombres sont soit dans un glaciaire de fond B soit successeur d'un nombre de type B, leur quadruple possède un antécédent direct dans Syracuse, et cet antécédent ajoute 2 à leur glacialité de départ, les amenant vers un glaciaire qui divise donc leur fond par trois. Nous appelons ces nombres "de type C".

Quiconque peut raccommoier les bourgeons de type A résout Syracuse.

Pour donner une idée de leur fréquence, de 1 à 203 il n'y a que cinq impairs de type A qui soient verticaux rouge, à savoir 5, 29, 53, 77 et 101, parmi les impairs, leur fréquence approche donc les 5%. De plus, il n'est pas nécessaire de résoudre tous les bourgeons de type A, puisque les avalanches offrent de nouvelles opportunités de les raccommoier. Pour bien comprendre cette logique, considérons le bourgeon de racine 5, qui est envoyé dans le glaciaire de fond 1 et se ramène donc au raccommoier entre 17 (l'image de 11) et 1. Comme 17 est un nombre de série V dans ce glaciaire et que sa glacialité est 2, il est congruent à 3: $Syr(17) = 13 = V(3)$. Or 3 et 1 sont congruents par l'équivalence régulière.

Partant d'un bourgeon non résolu, la paire (5;11), qui est l'image de la paire non résolue (3;7), est ramenée finement à une paire résolue, qui est (1;3). L'avalanche qui sépare l'image de 7 (à savoir 17) et l'image de 3 (à savoir 1) est raccommoier, parce que nous pouvons prouver que 1 et $S(1)=3$ sont couverts par l'équivalence régulière. Mais si tel n'était pas le cas, supposons que nous tombions sur une paire (a; S(a)) qui n'est pas couverte (par exemple la paire 15;31), alors elle correspondrait finement à un autre bourgeon de type A.

En manipulant les équivalences régulières dont nous avons démontré l'existence le long de toute branche rouge, il est possible de calculer des équivalences non régulières, ou en tout cas dont la régularité n'est pas distribuée sur l'arbre binaire, mais sur l'arbre ternaire. Ce faisant, nous réalisons bien un **calcul** selon une méthodologie nouvelle. La maîtrise de ce calcul est le fondement de notre programme de résolution du problème de Syracuse.

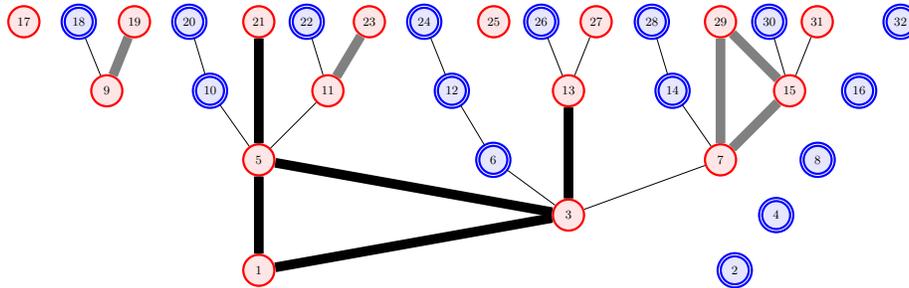


Figure 3. Dans le Romanesco (2;4), le réseau d'équivalence de $1 \equiv 3 \equiv 5$ est figuré en noir, et celui de $7 \equiv 15 \equiv 29$ est figuré en gris. 7 étant de type C, il a un précurseur glaciaire qui est 9, et 7 étant de rang 2 son image par Syracuse est le nombre de rang 1 11. L'algèbre romanescque tient à raccommoier les deux réseaux, et à produire une procédure de raccommoier finie pour, assumant le niveau 2^n du Romanesco déjà connexe, raccommoier le niveau 2^{n+1} . Pour ce premier niveau de travail qui est le raccommoier du réseau $7 \equiv 15 \equiv 29$ avec le réseau $1 \equiv 3 \equiv 5$, on a $7 \equiv 17$ et $17 \equiv 1$ si $1 \equiv 3$ car 17 est de série V dans le glaciaire de fond 1 et que sa glacialité est de

2, donc 17 congrue au Vertical du triple de 1. QED pour cette première étape donc, qui à partir d'une équivalence qui va de 2^0 à 2^2 raccommode tout l'arbre binaire complet jusqu'à 2^4 . **On ne cherche donc plus à étudier les orbites des nombres, mais les orbites compressées de leurs équivalences et des équivalences qu'elles rencontrent en chemin.** Même si à partir du calcul princeps $(1 \equiv 3 \equiv 5) \equiv (7 \equiv 15 \equiv 29)$ sur le Romanesco (2;4) on observe que les calculs suivants auront une propensité à enfler, il est beaucoup plus facile de démontrer leur finitude que de démontrer seulement celle des orbites de Syracuse. A chaque tentative de raccommoder le niveau $n+1$ au niveau n dans l'arbre binaire complet, on est en effet aidé par l'existence de l'équivalence régulière. On pourrait aussi s'aider du caractère autosimilaire de l'arbre binaire complet en tant que graphe.

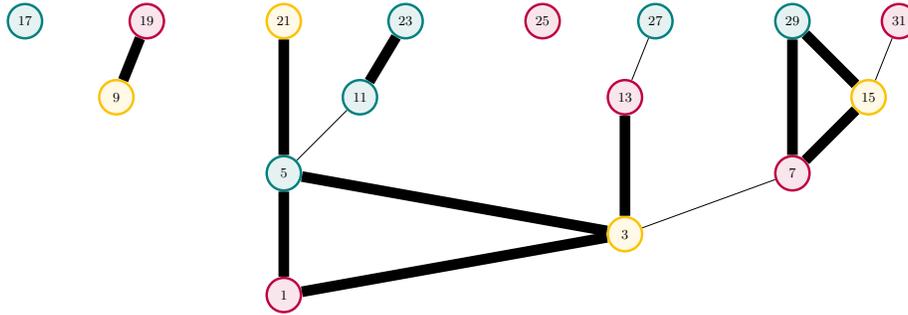


Figure 4. Représentation du Romanesco (2; 3; 4) muni de ses équivalences quaternaires régulières. Les nombres pairs ont été retirés pour faciliter la lisibilité. On a représenté une partie des intersections ternaires en représentant les nombres de type A en turquoise, les nombres de type B en doré et les nombres de type C en violet. Cet objet forme un système de coordonnées puissant pour différencier puis résoudre le problème de Syracuse, de la même façon qu'un repère cartésien forme un système puissant pour représenter une fonction, et un outil décisif de la géométrie algébrique. Bien entendu, le système de coordonnées dans le *Romanesco*(2; 3; 4) est plus complexe et s'exprime par des propositions du type "13 est vertical rouge et de type C". Comme il s'agit d'un cristal de nombres, on remarque facilement qu'en matière de types, $S(B) = C$, et $S(C) = (B)$, que $V(A) = B$ et $V(B) = (C)$. Ainsi, il ne peut y avoir de branches impaires que de type C-B ou de type A-A et de glacis que de type A-B ou de type C-C, ce qui est très important pour résoudre Syracuse.

Dans Syracuse, tout nombre de rang 2 ou plus finit dans un glacis dont une puissance de 3 du déterminant de sa branche est un élément, et tout nombre de glacialité 1 ou plus finit dans une branche dont une puissance de 3 du fond du glacis est un élément.

Comme les nombres de glacis intersectent finiment une paire de nombres de branche, ils rencontrent toujours une équivalence quaternaire régulière. Celle-ci peut se présenter à eux de deux façons, que l'on appellera "up" ou "down" :

- n est "up" si $n \equiv S(n)$ par l'équivalence quaternaire régulière
- n est "down" si $n \equiv S^{-1}(n)$ par l'équivalence quaternaire régulière ou que n est Vertical rouge

Pour désigner un nombre muni de son état up ou down on l'écrira par son type suivi de son état par exemple *Bup* ou *Cup*.

Pour mieux comprendre le mécanisme par lequel les puissances de 3 impaires "raccommodent" l'arbre binaire complet, étudions la paire glaciaire $\{17; 9\}$. 17 est de glacialité 2 et 9 de glacialité 1 dans le glacis de fond 1 donc $9 \equiv S(3)$ et $17 \equiv V(3)$, dès lors, soit 3 est *up* et donc $3 \equiv S(3)$ soit 3 est *down* et donc 3, qui n'est pas vertical, congrue à son S^{-1} . Si l'on reporte maintenant cette équivalence dans son glacis initial. Si la puissance de 3 du fond du glacis est *up* alors la paire glaciaire est équivalente, sinon, chacun des nombres est équivalent à un autre selon une formule précise. Nous appellerons chacune de ces situations, respectivement **vanille** et **banane**

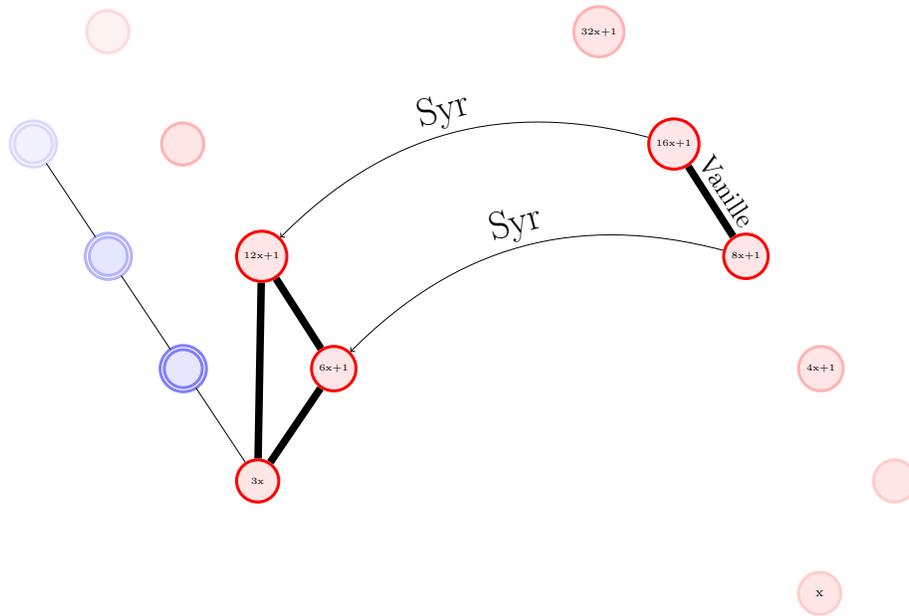


Figure 5. La vanille est une transformation finie d'une équivalence quaternaire régulière reliant un type B et son successeur (Ce B étant rendu équivalent à son successeur par l'équivalence quaternaire régulière c'est un *Bup*). On divise le type B par trois pour remonter l'équivalence dans le glacis, où elle relie soit une paire glaciaire de type C si le type B était divisible par 9 ou plus, soit une paire glaciaire A-B ou B-A selon que le B était un multiple de 3 d'un type C ou d'un type A. Toute vanille C-C est donc finiment équivalente à une vanille A-B ou une vanille B-A.

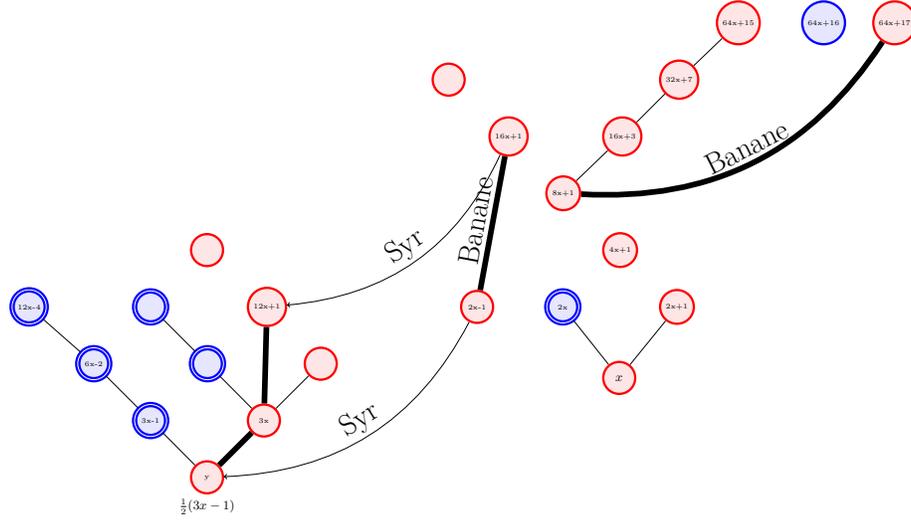


Figure 6. Banane. Quand une paire glaciaire rencontre une puissance de 3 du fond de son, glacis qui est "down" alors il est démontré une autre équivalence plus complexe : le nombre de coordonnée glaciaire paire (nous l'appelons g_2) est équivalent à un plus petit que lui, qui vaut $\frac{g_2-9}{8}$, quant au nombre de coordonnée glaciaire impaire (g_1) est équivalent à un plus grand que lui, qui vaut $g_1 \cdot 8 + 9$.

Ce que nous avons appelé dans une publication précédente le "**théorème du banana split**" est la démonstration simple que, si les glacis ne peuvent rencontrer une puissance de 3 de leur fond qui n'est que "up" ou "down" alors toute paire glaciaire, soit est congruente, soit donne lieu à deux bananes, l'une descendante et l'autre montante.

On a rappelé que quiconque peut résoudre les bourgeons A-A résout Syracuse, or ces transformations finies de l'équivalence quaternaire régulière que sont les bananes et les vanilles résolvent une infinité de bourgeons, précisément parce que l'arbre ternaire parcourt **obliquement** le Romanesco (2;4) et qu'en conséquence il permet d'assurer qu'une équivalence quaternaire en croise une autre.

De plus, le long d'un glacis, la verticalité et la successalité des séries de puissances de 3, telle qu'on l'a vue plus tôt, a pour conséquence une distribution précise des bananes et des vanilles que l'on appellera "vvvb" ou "bbbv" c'est-à-dire qu'un glacis est soit du type que si une paire produit une vanille, les trois suivantes produisent une banane (bbbv), soit du type inverse (vvvb), en effet

- Si a est vertical rouge, alors $3a$ est successal, et $9a$ est vertical rouge donc nécessairement "down"
- Si a est vertical bleu, alors $3a$ est successal, et $9a$ est vertical bleu donc nécessairement "up"
- Si a est successal "up" alors $9a$ est successal "down"
- Donc les variétés de puissances de 3 qui sont verticales bleues ne rencontrent qu'une fois sur quatre un successal down, et les variétés verticales rouges ne rencontrent qu'une fois sur quatre un successal up. Donc un glacis est soit de variété vvvb soit de variété bbbv.

Encore une fois, c'est parce que l'arbre ternaire parcourt **obliquement**¹ le Romanesco (2;4) que des équivalences quaternaires régulières peuvent finement résoudre des bourgeons. On peut prendre comme exemple le bourgeon {157;315}, comme on a donc $157 = V(39)$. Si on déroule ce bourgeon dans Syracuse, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Syr}(315) &= 473 \\ \text{Syr}(157) &= \text{Syr}(39) \\ &= 59 \end{aligned}$$

On obtient donc une avalanche séparant 473, nombre de glacis de série S, et 59, fond de glacis.

$$\begin{aligned} \text{Syr}(59) &= 89 \\ \text{Syr}(473) &= 355 \end{aligned}$$

Or $355 = S(177)$ et 177 est un nombre de glacialité supérieure à 0 donc il est congruent à son successeur. Alors, connecter 177 et 89 termine notre calcul. Ces deux nombres appartiennent à la même paire glaciaire donc s'il existe une vanille entre eux l'équivalence est démontrée et le bourgeon {157;315} est résolu. Pour que cette vanille existât entre 177 et 89 il faut que $3 \cdot 11$ soit *up*, or 11 étant successal, $3 \cdot 11$ est vertical, il est de variété bleue, donc *up*, QED.

Le cas, pour l'instant anecdotique du bourgeon {157;315} se produit en réalité infiniment dans l'arbre binaire complet, parce qu'il est régi par l'existence de certaines vanilles : dès l'instant où l'on a le moyen de démontrer que 59 et 473 sont congruents, on a résolu un bourgeon. En effet, ces deux nombres sont de type A et 473 est glaciaire, donc son précurseur est le haut d'un bourgeon.

- Toute démonstration $a \equiv G(V(a))$ où a est un impair de *typeA* résout un bourgeon.
- Toute vanille B-A où B peut s'écrire comme le triple d'un *typeA* produit une telle équivalence
- On produit un tel B, c'est-à-dire un B glaciaire de série V, en multipliant par 3 un haut de bourgeon de type A de fond rouge (mais il faut une condition supplémentaire pour que B vanille avec l'autre nombre de sa paire).
- C'est parce que 59 est justement un haut de bourgeon de type A et de fond rouge (7) qu'une éventuelle vanille entre 177 et 89 amène une équivalence en $G(V(a))$ qui prouve donc un bourgeon. Comme 59 est un haut de bourgeon de fond 7, Syracuse l'envoie dans le glacis de fond $\text{Syr}(7) = 11$ et comme $3 \cdot 7$ est vertical rouge, $G^{-1}(3 \cdot 7)$ est successal et de variété verticale bleue.

1. Plus exactement la dynamique de Syracuse sur l'arbre binaire complet réalise des permutations et des cisaillements de branches, que, parce qu'ils se réalisent dans le glacis, nous avons appelés (**Avalanches**). Si l'on a déjà expérimenté la représentation d'un Rubik's Cube sur une bouteille de Klein, il est intéressant de voir la dynamique de Syracuse sur l'arbre binaire comme une sorte de Rubik's cube ou de Cadenas intriqués dont le mécanisme consiste à faire tourner des branches autour de tiges verticales. Imaginer un Rubik's cube sur un chou Romanesco donne une bonne première intuition de cette idée, d'autant plus intéressante qu'un tel cadenas de nombres entiers peut permettre de générer des codes, et des algorithmes de Proof of Work comme l'a bien compris Fabian Bocart (2018)

- Une condition plus exacte est donc que le triple de tout haut de bourgeon de type A et de fond rouge, si le fond est de la variété ternaire verticale rouge, est un B de glacis qui vanille avec son G^{-1} donc que l'existence de ce bourgeon résout un autre bourgeon.

En prélude à notre programme de résolution, on observe déjà un comportement intéressant, qui n'est pas isolé, en ce que la moitié des bourgeons de type A (ceux de fond rouge), donc la moitié des impairs qui posent problème pour apporter une solution au problème de Syracuse, amène aussi une solution par ailleurs. Un algorithme qui parcourra le Romanesco (2;3;4) pour raccommoier les équivalences quaternaires régulières entre elles et prouver leur connexité totale, se verra offrir une information à chaque fois qu'il rencontrera un problème (un bourgeon de type A), et parfois même une solution (la preuve d'un autre bourgeon).

D'une façon générale, les puissances de 3 des impairs, parce qu'elles sont les noeuds des intersections entre branches et glacis qui permettent de coudre des équivalences quaternaires entre elles, amènent toute une information susceptible de démontrer un bourgeon. On a vu que toute équivalence $a \equiv G(V(a))$ où a est de type A résout un bourgeon, appelons une telle équivalence une **Orchidée**. Une équivalence $a \equiv G^n(V(a))$ s'appelle une n-Orchidée.

- Toute n-Orchidée A-A ou A-C (si n est pair) résout un bourgeon. Tout bourgeon est équivalent à une n-orchidée A-A. Une n-orchidée A-A de n pair résout un bourgeon de fond rouge, si n est impair elle résout un bourgeon de fond bleu.
- Toute Vanille B-A où B s'écrit comme le triple d'un impair de type A produit une 1-orchidée A-A
- Toute Banane A-C où $C \equiv G^{-1}(C')$ résout un bourgeon
- En particulier, tout Bup de rang 2 ou plus produit une telle banane, et donc plus exactement tout Bup de rang 2 ou plus résout le bourgeon $64 \cdot \frac{Bup}{3} + 11$

On a donc d'une part la preuve qu'une infinité de bourgeons sont résolus, d'autre part la démonstration de ce que seule une sous-classe de bourgeons nécessite d'être résolue pour résoudre Syracuse. La détermination exacte de cette sous-classe constitue un beau problème de théorie de Ramsey d'ailleurs, et intellectuellement, l'algèbre romanesque emprunte beaucoup d'intuitions fondamentales à la théorie de Ramsey et à la théorie de Galois. D'une part le travail fondamental de la théorie de Ramsey tient à exploiter l'impossibilité d'un désordre total (une idée particulièrement féconde pour un chaoticien) et la définition suffisante à l'apparition de propriétés données, d'autre part l'intuition fondamentale de la théorie de Galois, qui permet son extension à des domaines supérieurs à son champs initial comme la théorie de Galois différentielle par exemple, tient à lier l'existence de solutions à un problème à la forme d'une structure algébrique qui le dépasse. L'algèbre romanesque de Syracuse repose fondamentalement sur ces deux intuitions : l'introduction d'un objet algébrique supérieur qui est le Romanesco (2;3;4) et le cernement d'un ordre suffisant dans la chaotité des orbites pour prouver leur connexité totale, par le cernement de conditions suffisantes sur la structure algébrique elle-même (e.g. *Si a est vertical rouge, 9a l'est aussi et 3a est successful*).

Il y a dès lors plusieurs façons de finaliser une résolution du problème de Syracuse.

- Résoudre tous les bourgeons A-A
- Démontrer que tout Cup et tout Bup (tout type C ou B qui est *up*) de rang 2 ou plus sous-pointe, c'est-à-dire qu'il a un plus petit que lui dans son orbite, antérieure ou postérieure dans Syr.

- Résoudre toute n-orchidée A-A, ou, ce qui est équivalent :
 - Pour tout impair n de type C, pouvoir prouver son équivalence à toute puissance de 3 de lui-même
 - Pour tout impair n de type A, pouvoir prouver son équivalence au successeur de toute puissance de 3 de lui-même, ou ce qui est équivalent, et constituera l'essentiel de notre attaque dans cette article :
 - partant de la triade de congruence $1 \equiv 3 \equiv 5$ présenter un algorithme qui raccommode finiment :
 - * $1 \equiv (3 \cdot 1) \equiv (S(3 \cdot 1))$
 - * $3 \equiv (3 \cdot 3) \equiv (S(3 \cdot 3))$
 - * $5 \equiv (3 \cdot 5) \equiv (S(3 \cdot 5))$
 - * $a \equiv (3 \cdot a) \equiv (S(3 \cdot a)) \forall a$
 - * (Dans une précédente publication nous avons appelé cet algorithme, sans le décrire à ce niveau "Golden Automaton" et il sera détaillé à la fin de cet article².)

3 Programme de résolution

3.1 Induction par des calculs convergents à partir du triangle $1 \equiv 3 \equiv 5$

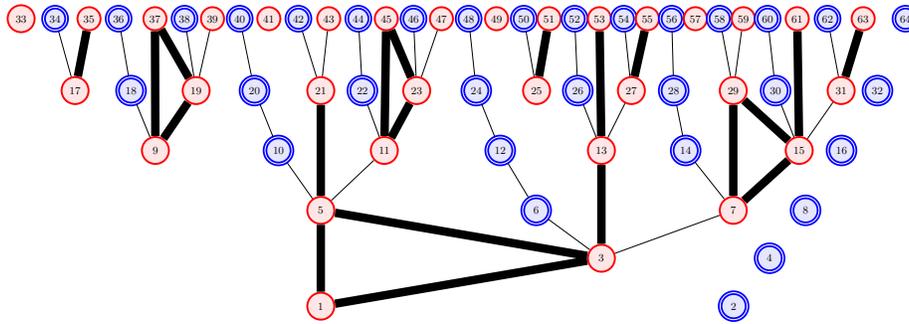


Figure 7. Représentation du Romanesco (2;4) de 2^0 à 2^6 , muni de ses équivalences quaternaires régulières.

2. Noter que l'équivalence $5 \equiv (3 \cdot 5) \equiv (S(3 \cdot 5))$ étant entre deux Mersenne non couverts par l'équivalence quaternaire régulière elle représente la borne supérieure de la longueur du calcul à ce niveau, et que l'inflation des calculs du Golden Automaton dépend finiment du rang des paires d'impairs qu'il essaie de raccommode

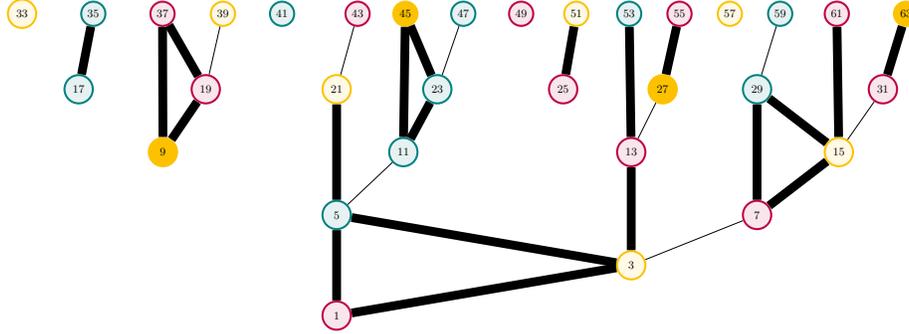


Figure 8. Représentation du Romanesco (2; 3; 4) de 2^0 à 2^6 , muni de ses équivalences quaternaires régulières. On a de surcroît représenté les nombres divisibles par 9 en or plein, les puissances de trois étant non seulement des attracteurs de la dynamique de Syracuse mais **en particulier des points de raccordement des équivalences quaternaires régulières**. Elles sont en quelque sorte des "points algébriques" dans le sens étymologique, puisqu'elles racommodent des équivalences a priori disjointes, marquant le point où une dynamique de glacis intersecte une branche.

Face au problème de Syracuse, le calcul romanesque princeps, que nous avons exécuté précédemment, tient à inférer que l'équivalence quaternaire simple $1 \equiv 5$ implique $1 \equiv 3$ puis l'équivalence supérieure $3 \equiv 7$. Le programme de résolution tient à étendre cette méthodologie en démontrant qu'il existe toujours un *calculromanesque* fini, c'est-à-dire une composition finie des opérations $\{Syr, V, Sup\}$ (où *Sup* désigne l'opération *S et la propriété que son argument est up*) ainsi que de leur inverses quand ils existent, permettant d'inférer que si un niveau n de l'arbre binaire ou ternaire complet converge vers 1 le niveau $n + 1$ converge aussi.

La conjecture qui fonde ce programme est donc que toute inflation du calcul romanesque princeps permettant de calculer que :

$$\begin{aligned}
 1 \equiv 5 &\Rightarrow 1 \equiv 3 \\
 &\Rightarrow 17 \equiv 1 \\
 &\Rightarrow 7 \equiv 3 \equiv 1
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

demeure finie. Dans ce calcul le segment à raccomoder $3 - 7$ se rapporte finiment au bourgeon de type A $5 - 11$ qui se ramène à la 2-orchidée $17 - 1$ qui est immédiatement résolue par le fait que $1 \equiv 5 \Rightarrow 1 \equiv 3$

Et ce simple calcul de trois lignes, **combiné aux équivalences quaternaires régulières rencontrées en chemin**, permet d'étendre le résultat de convergence de $1 \equiv 1$ à $1 \equiv 15$ et à tous les nombres de 2^0 à 2^4 .

Or muni de tous les théorèmes que l'on a décrits à la Section 2, il devient possible d'établir un **modèle abstrait** de la progression du niveau 2^n au niveau 2^{n+1} de l'arbre binaire ou de l'arbre ternaire, basé sur l'enchaînement logique des coordonnées romanesques des séries de nombre (*e.g.* "si a est vertical rouge, alors 9 a l'est aussi") sans plus nécessiter de spécifier les nombres eux-mêmes.

Pour en comprendre encore la logique de cette procédure, si nous avons calculé que l'identité $1 \equiv 1$ implique la convergence de tous les nombres de 2^0 à 2^4 , voyons comment en inférer celle de tous les nombres à 5 chiffres en base 2.

La Figure 7 nous montre immédiatement que seuls deux d'entre eux posent problème : 27 et 31, et en réalité 27 étant un 1-bourgeon qui n'est pas de type A, il est finiment équivalent à un bourgeon de type A, précisément celui de 31 car $Syr(27) = 41$ va dans le glacis dont le fond est $Syr(3) = 5$ et 41 étant le premier nombre de glacis d'un vertical rouge il est envoyé sur un successal, qui, comme 5 est le vertical de 1, est précisément un Mersenne, 31.

Le déterminant de la branche des Mersenne étant 1, 7 arrive dans son glacis en s'écrivant $G(9 \cdot 1)$ et donc 31 arrive dans son glacis en s'écrivant $G9^2 \cdot 1$. Ce Glacis est aussi celui de fond 5, comme pour 41 (l'image de 27) et $G(81) = 161$ qui est de type S (on peut démontrer pourquoi) donc démontrer la 3-orchidée $161 - 5$ résout le problème. Sa résolution se ramène au problème de démontrer que $9 \cdot 5$ est congruent à son successeur. 5 Etant vertical rouge, le multiplier par 9 l'est aussi, donc $45-91$ est un bourgeon. Cela semblerait poser un nouveau problème puisqu'on cherche justement à démontrer que $9 \cdot 5 \equiv S(9 \cdot 5)$ mais en réalité non seulement cette progression contraint de plus en plus l'issue de l'équivalence sur l'on cherche à démontrer, mais en plus, au passage, elle permettrait de poser la résolution d'autres bourgeons sur lesquels nous ne nous sommes pas arrêtés.

3.2 Attaque par les nombres *ter* ou *Golden Automaton*

De même qu'il y a des nombres pairs et impairs, en base 3 les nombres sont *ter* (de type B), *unter* (type C) et *deuter* (type A).

- L'opérateur $\mathfrak{D}_3^0(b)$ ("**ternarité**") pour un nombre de type B rend le nombre de fois qu'il est divisible par 3 et le nombre en résulte (révélant aussi son type). Par exemple $\mathfrak{D}_3^0(405) = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$
- L'opérateur $\mathfrak{D}_3^1(c)$ ("**unterarité**") pour un nombre de type C rend le nombre de fois que l'on peut lui faire subir l'opération C^{-1} dans \mathbb{N} définie comme $C^{-1}(c) = (c-1) \cdot \frac{4}{3} + 1$ et le nombre qui en résulte (révélant aussi son type). Si un type C est successeur ou dans le glacis dont le fond est un type B de ternarité n , alors son unterarité est n . Par exemple $811 = S(405)$ et $\mathfrak{D}_3^1(811) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2561 \end{bmatrix}$
- L'opérateur $\mathfrak{D}_3^2(a)$ ("**deuternarité**") pour un nombre de type a rend le nombre de fois que l'on peut lui faire subir l'opération A^{-1} dans \mathbb{N} définie comme $A^{-1}(a) = (a+1) \cdot \frac{2}{3} - 1$ et le nombre qui en résulte (révélant aussi son type). Si un type A peut s'écrire comme $G(b)$ d'un type B de ternarité n , alors sa deuternarité est n . Par exemple $809 = G(405)$ et $\mathfrak{D}_3^2(809) = \begin{bmatrix} 4 \\ 161 \end{bmatrix}$

Les nombres *ter* marquant les lieux de racommodage des équivalences quaternaires régulières par Syracuse, les diviser par trois remonte des équivalence en haut de leur glacis. Par exemple 27 s'écrit 1000 en base 3 donc $\mathfrak{D}_3^0(27) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ et comme 27 est un haut de bourgeon, il est *up* donc il démontre une vanille plus haut dans le glacis de fond 1. Ce phénomène n'est pas sans

rappeler celui des *gliders* dans le *jeu de la vie* de Conway : les *Bup* "lancent" des compositions d'équivalences quaternaires (en l'occurrence précisément des *vanilles* aussi haut que leur ternarité n , et plus précisément,

- S'ils s'écrivent comme $a\underbrace{0\dots 0}_n$ en base 3 ils produisent une vanille A-B
- S'ils s'écrivent comme $c\underbrace{0\dots 0}_n$ en base 3 ils produisent une vanille B-A ³

Il n'est pas forcément impossible de remonter le Romanesco (2;3;4) par la voie binaire et quaternaire pour démontrer que si le niveau 2^n est connexe le niveau 2^{n+1} l'est aussi, mais ce n'est pas la voie la plus facile, car à chaque niveau les nombres de rang élevé (et à chaque niveau de l'arbre binaire complet, le plus élevé de ces nombres est son Mersenne, comme 31 par exemple) ainsi que leurs précurseurs (27 et 41 pour 31 vont poser des problèmes que l'on ne pourra pas attaquer sans avoir accumulé un certain nombre de preuves préalables. Pour le dire simplement, si raccorder un *Cup* et un *Bup* de rang élevé au rang précédent de l'arbre binaire complet est un *théorème* difficile, pour le cibler il faut d'abord faire le plein de *lemmes* accessibles, ou plus métaphoriquement, **il faut récolter tous les fruits bas pour aller chercher les fruits hauts dans l'arbre, où bas signifie facile plutôt que géométriquement bas.**

Ce programme de preuve peut rappeler un peu la méthode "Cube and Conquer" par laquelle Heule *et al.* (2016) ont attaqué avec succès les triplets pythagoriciens booléens. Elle est aussi avant tout une méthode **oblique** qui ne cherche pas à attaquer frontalement les longues branches rouges et leurs précurseurs (qui constitueront les calculs romanesques les plus longs) mais au contraire à raccommoder les nombres de type B - et en particulier les *Bup*, les plus accessibles en premier.

Dans la **Figure 7** poursuivant la méthodologie par laquelle nous étions parvenus à démontrer que $(1 \equiv 3 \equiv 5) \Rightarrow$ (convergence de tous les impairs jusqu'à 15), et ce, rappelons-le, sans calcul brut des orbites de Syracuse.

Ce qui nous a permis ce calcul, c'est avant tout la connexité d'un nombre *ter* à savoir 3 qui du coup implique que $17 \equiv 1$, donc que $7 \equiv 1$ et comme $7 = S(3)$ on peut déclarer que $3 \cdot 1 \equiv S(3 \cdot 1)$ donc on capture une nouvelle équivalence : $1 \equiv 9$ et en plus, 9 étant de glacialité 1 il est *up* donc :

$$\begin{aligned} 1 &\equiv 33 \\ &\equiv 65 \end{aligned} \tag{2}$$

De la même façon que l'on peut construire une bijection entre \mathbb{N} et \mathbb{N}^2 en connectant alternativement les abscisses et les ordonnées de \mathbb{N}^2 et toutes les paires de nombres diagonales entre elles à chaque passage ("*bootstrap*") et même si l'arbre binaire complet, poussée chaque branche à l'infini, produit non plus un ensemble à la cardinalité de \mathbb{N} mais de \mathbb{R} , on entend procéder de la même façon en raccommodant depuis le glaciais de fond 1 (notre abscisse) jusqu'aux Mersenne (notre ordonnée).

3. Cette vanille B-A donc, produira une orchidée, mais pas forcément de type A-A

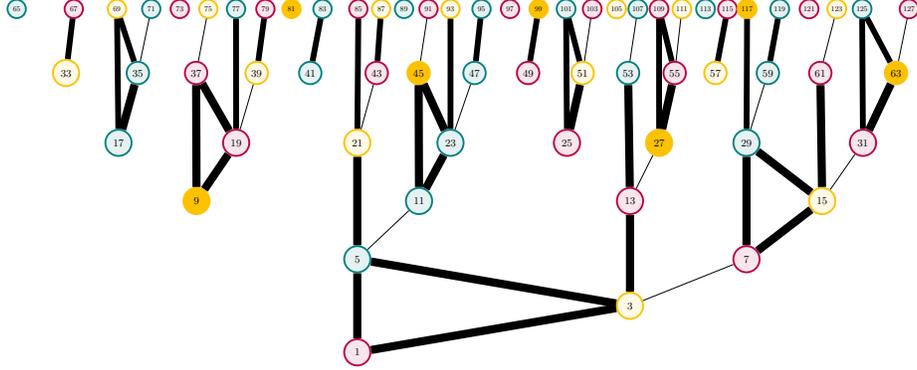


Figure 9. Romanesco (2;3;4) de 2^0 à 2^7 muni de ses équivalences quaternaires régulières. Nous allons montrer comment l'attaque par les *ter* construit un raccommodage diagonal ("bootstrap") de ces équivalences, en partant du glacis de fond 1, puis en redescendant progressivement en direction des Mersenne.

Partant du calcul (2) et de la connexité totale de 1 à 15, on a donc

$$1 \equiv 65 \Rightarrow 21 \equiv 43 \quad (3)$$

21-43 est un bourgeon B-C donc 43 est *up*, ce qui ramène un nouveau *ter* dans le réseau. Ce *ter* est forcément *down* donc son tiers génère une banane dans son glacis et son tiers est congruent à lui-même puisque 87 est successal, son tiers est vertical donc il tombe dans le réseau déjà démontré. Même si nous n'avons utilisé qu'un raisonnement abstrait jusque là, notons pour se repérer que le tiers de 87 est $29 = V(7)$.

$$57 \equiv 465 \equiv 117 \quad (4)$$

En plus les *ter* 57 et 465 sont *up* parce qu'ils sont verticaux bleu, le *ter* 117 est un bourgeon donc le raccommoder offrira la même quantité de solutions que le raccommodage 21-43. Pour exploiter le raccommodage de ces *ter* on les divise par 3 et on obtient que 19 et 155 congruent à leur triple et à leur successeur. On obtient aussi que 39 congrue à son triple, pas encore à son successeur puisqu'il est un bourgeon mais son successeur qui est 235, étant un 2-bourgeon de fond rouge (7), sera congruent à 9 fois $Syr(7)=11$, donc sitôt que l'on aura raccommodé 99 à notre réseau de preuve ce bourgeon sera résolu, or 33 étant vertical bleu, 99 est successal et en l'occurrence il est *down* sur 49 qui est un nombre de glacis, de variété V, il congrue à 9, donc ce bourgeon est résolu.

$$\begin{aligned} (3 \equiv 9) \wedge (49 \equiv 99) &\Rightarrow 33 \equiv 99 \\ &\Rightarrow 117 \equiv 235 \end{aligned} \quad (5)$$

Le calcul continue à raccommoder l'arbre. On n'a pas encore calculé les conséquences de ce que 19 congrue à son triple et au successeur de son triple.

$$\begin{aligned}
19 \equiv (3 \cdot 19) \equiv (S(3 \cdot 19)) &\Rightarrow 305 \equiv 153 \equiv 77 \\
&\Rightarrow 67 \equiv 135 \\
&\Rightarrow 17 \equiv 1089
\end{aligned} \tag{6}$$

On a aussi, puisque $11 \equiv 33$ et que 33 est vertical bleu donc *up*

$$\begin{aligned}
(11 \equiv (3 \cdot 11) \equiv (S(3 \cdot 11))) &\Rightarrow 45 \equiv 89 \equiv 177 \\
&\Rightarrow 39 \equiv 19 \\
&\Rightarrow 59 \equiv 237 \equiv 473 \equiv 945 \\
&\Rightarrow 315 \equiv 157
\end{aligned} \tag{7}$$

Et encore

$$\begin{aligned}
(7 \equiv (3 \cdot 7) \equiv (S(3 \cdot 7))) &\Rightarrow 113 \equiv 57 \equiv 29 \\
&\Rightarrow 75 \equiv 37
\end{aligned} \tag{8}$$

$$(13 \equiv (3 \cdot 13) \equiv (S(3 \cdot 13))) \Rightarrow 13 \equiv 105 \tag{9}$$

Or 105 est vertical bleu donc il est *up* et $105 = 3 \cdot 35$ donc

$$\begin{aligned}
(35 \equiv 281 \equiv 561) &\Rightarrow (187 \equiv 93) \\
&\Rightarrow ((3 \cdot 31) \equiv (S(3 \cdot 31)))
\end{aligned} \tag{10}$$

Le calcul romanesque le plus "difficile" à ce niveau de l'arbre binaire est donc celui congruant 15 et 31 , deux Mersennes consécutifs qui ne sont pas *a priori* couverts par l'équivalence quaternaire régulière. **D'une façon générale, la quantité de calcul à réaliser pour raccommo-der deux Mersennes consécutifs et non couverts croit au moins exponentiellement avec leur rang, ce qui est valable pour tous les impairs de haut rang.** Rappelons aussi que connecter une paire non triviale de nombres de rang n revient à connecter un bourgeon A-A qui sera $(\frac{3}{2})^n$ au dessus de la paire. 31 étant un *Bdown* il a un précurseur par le glacis qui est 41 dans le glacis de fond $\frac{15}{3} = 5$. On a représenté sur la **Figure 9** le grand nombre d'équivalences dont en prouver une seule implique que $15 \equiv 31$, ces équivalences étant les plus longues à obtenir, on les a repérées dans la **Figure 9** par la couleur "Awesome" dans le nuancier de L^AT_EX. Résoudre une seule d'entre elles prouve toutes les autres.

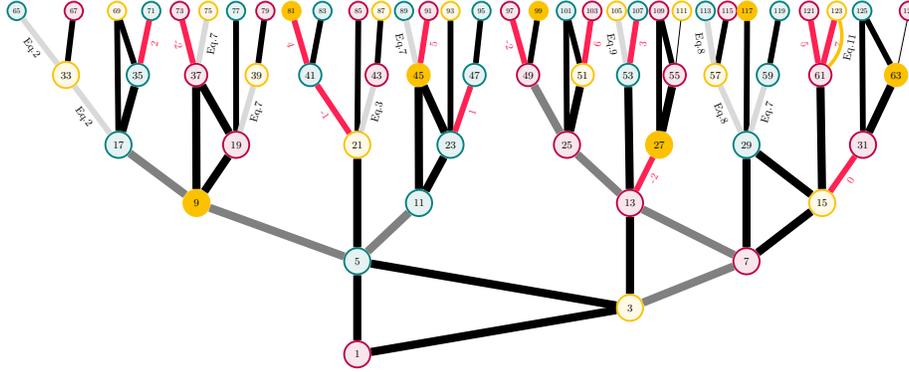


Figure 10. Calcul de bootstrap ternaire ⁴ sur le Romanesco (2;3;4). L'équivalence de 1 à 15 du calcul princeps est figurée en gris foncé. Les équivalences issues des calculs suivants sont indiquées en gris clair avec le numéro correspondant de l'équation dans le texte. Toutes les équivalences qui sont égales à celle entre les Mersenne 15 et 31 (la plus difficile à calculer) sont figurées dans la couleur rouge "Awesome" dans le nuancier de L^AT_EX, et numérotées par l'ordre où elles arrivent dans le calcul : 41-21 par exemple est numéroté "1" parce que 41 est le précurseur de 31 et 13-27 est numéroté "2" parce que 31 est le précurseur de 41. Dès que le Golden Automaton raccommode une seule de ces branches "Awesome" les équivalences quaternaires régulières 7-15 et 31-63 sont recousues sur les Mersennes, mais c'est l'équation (11) que nous détaillons juste après, qui permet de recoudre 61 et 123 donc 15 et 31, comme nous l'indiquons sur la figure.

Comment raccommode le Mersenne 31 à son prédécesseur à présent ? Par l'équation 7 on a $19 \equiv 39$ donc on capture le Bup $39 = 3 \cdot 13$ donc on a $209 \equiv 105 \equiv 13$. 209 est de type A et il raccommode le bourgeon 69-139 donc capture un nouveau Bup : $69 = 3 \cdot 23$. Donc dans le glacié 23,

$$(369 \equiv 185 \equiv 23) \Rightarrow (61 \equiv 123) \tag{11}$$

donc le type A 185 raccommode le bourgeon 61 – 123 QED

3.3 description algorithmique simple du Golden Automaton

1. Partir de $1 \equiv 5 \equiv 7$
2. Diviser le premier B dans le réseau par trois

$$B^{-1}(3) = 1$$

4. Pour l'instant nous n'affirmons pas que cette méthode est la seule pour raccommode finement toutes les équivalences quaternaires entre elles à tout niveau 3^n de l'arbre ternaire, mais c'est peut-être le cas tant les attaques par les glaciés semblent intrinsèquement plus efficaces, et les équivalences quaternaires sont justement recousues par les nombres *ter*, qui en fin de phase ascendante posent un problème de raccommode (les puissances de trois des déterminants de branche) et en phase descendante offrent des preuves de raccommode (les puissances de trois des glaciés). On peut conjecturer qu'il existe peut-être d'autres méthodes finies de raccommode des équivalences quaternaires, mais comme l'auteur penche plutôt en défaveur de la véracité d'une telle conjecture, pour l'heure, comme l'a écrit Wittgenstein avant lui "ce dont on ne peut parler il faut le ter"

3. Inférer l'égalité sur le glacis correspondant
 $1 \equiv G^2(1) = 17$
4. Si le nouveau nombre dans le réseau est de type A, lui faire subir A^{-1} jusqu'à obtenir un nombre qui n'est pas de type A
 $17 = G(9)$ donc $A^{-2}(17) = 7$
5. Ce nombre impliquera un Bup ou un Cup à connecter au réseau.
 7 est un *Cup*, et étant connecté à 3 il amène $1 \equiv S(3 \cdot 1) = 9$
6. Inférer l'égalité dans le glacis correspondant
 De plus, 9 étant de glacialité supérieure à 0 on a $9 \equiv S(9)$
 Donc $1 \equiv 33 \equiv 65$
7. Diviser par 3 en priorité les B qui sont démontrés congruents à leur successeur
 $11 \equiv 3 \cdot 11 \equiv S(3 \cdot 11)$
8. Répéter...
 $11 \equiv 89 \equiv 177$
 $A^{-1}(65) = 43$ donc le bourgeon 21-43 est résolu donc 21 devient un *Bup*.
 Donc $7 \equiv 57 \equiv 113$
 $A^{-1}(113) = 75$ donc le Bup en haut du bourgeon 37-75 est résolu, etc.

Glacis par glacis, les A-A verticaux bleu résolvent des bourgeons et finissent, raccommodent deux équivalences quaternaires régulières dans une branche C-B ou B-C, et les *Bup* de glacis garantissent que cette méthode ne s'arrête jamais : dès qu'on a un type A ou un C qui est prouvé congruent à la fois à son triple et au successeur de son triple, il raccommode un *Aup* de glacis et un *Bup* de glacis avec leur fond, ce qui respectivement produit un nouveau raccommodage d'équivalence quaternaire le long d'une branche (le *Aup*) et permet de rejouer (le *Bup*).

Cet algorithme **qui ne peut jamais tomber en panne de Bup pour le nourrir** permet donc de raccommo-der les équivalences quaternaires régulières sans avoir à calculer les orbites des impairs en force brute. **Il ne fonctionne que parce qu'il rencontre de nouvelles équivalences quaternaires régulières en chemin et il n'aurait pu être obtenu autrement.**

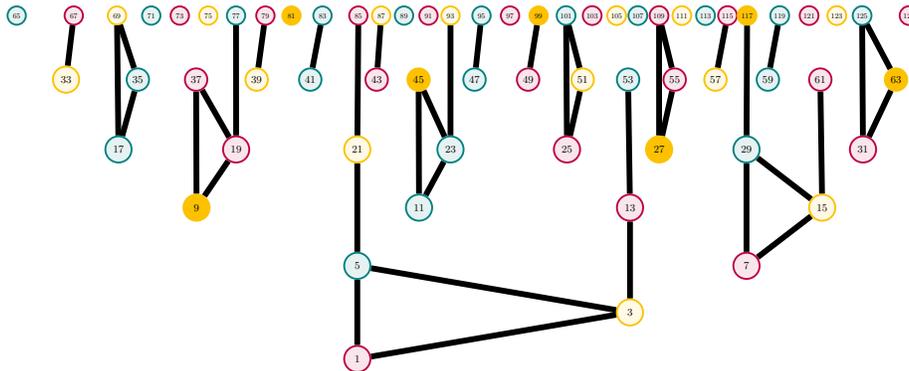


Figure 11 Romanesco (2;3;4) muni de ses équivalences quaternaires régulières, prêt à être raccommo-der par calcul du Golden Automaton à partir de $1 \equiv 3 \equiv 5$

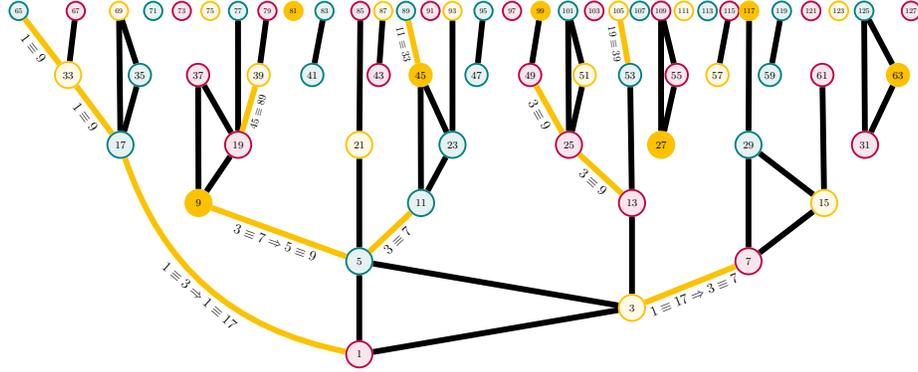


Figure 12 Romanesco (2;3;4) en cours de raccomodage par le Golden Automaton. Pour les trois premières équivalences (1-17; 13-7; 5-9) on a mis l'équation complète, puis on ne mettra que l'équivalence qui l'implique. Noter que le raccomodage étant diagonal, le front de l'arbre binaire n'est pas du tout le meilleur horizon de la représentation (l'arbre ternaire serait plus indiqué), puisque pour raccomoder 15-31 il faut monter jusqu'à $G(81)$ qui est au dessus de l'arbre représenté jusqu'à 2^7 , cependant les intersections de l'arbre ternaire et du Romanesco (2;4) **garantissent** que les orbites de raccomodage du Golden Automaton sont non seulement bornées mais qu'elles peuvent remonter jusqu'à tout nombre de rang n .

4 Conclusion

L'intersection des arbres binaire, ternaire et quaternaire fournit un système de coordonnées très puissant pour différencier la dynamique de Syracuse, décrire très précisément ses phases ascendantes et descendantes et **accessoirement** (car ce n'est pas du tout le résultat le plus important) isoler des sous classes de nombres dont la connexité de l'orbite, non plus nécessairement à 1, mais à celle de leur voisin successeur de branche dans l'arbre binaire complet ou, pour une autre classe, à leur triple, résout complètement le problème. Si par exemple nous avons d'abord montré qu'au plus 5% des impairs (et en réalité beaucoup moins) posaient *a priori* problème dans Syracuse, les récents résultats de type *almost all* établis par Terence Tao ne sont pas pour nous étonner. On attribue souvent à David Hilbert l'aphorisme probablement apocryphe mais néanmoins très juste "à la différence des bons, les faux numéros de téléphone ne sonnent jamais "occupé"", et un problème mathématique aussi difficile que Syracuse, puisqu'il sonne "occupé" depuis longtemps, est une invitation à la théorie plus qu'à l'utilisation d'un cadre préexistant. L'algèbre romanesque a été développée précisément dans ce but, pour fournir un nouveau cadre d'étude aux systèmes dynamiques discrets, et à des problèmes diophantiens autres que ceux engendrés par Syracuse. Pour résoudre Syracuse cependant, l'algorithme fondamental sur le Romanesco (2;3;4) muni de ses équivalences quaternaires régulières (qui, si on déploie l'arbre à l'infini, forment un ensemble de cardinalité \aleph_1) tient à étendre un réseau initial vers les nombres de type B (les *ter*) et à inférer l'implication dans leur glaciais, qui amène à son tour à la capture de nouveaux types B, parce que l'arbre ternaire parcourt obliquement le Romanesco (2;4). L'équivalence quaternaire régulière garantit que cette recherche amènera toujours de nouveaux types B, et la dynamique ternaire de Syracuse garantit que tout type B qui n'est pas encore résolu sera finiment échangé contre un autre qui le sera. Partant du réseau princeps $1 \equiv 3 \equiv 5$, 3 étant *ter*, on attrappe 9, qui résout donc le bourgeon 1 – 11, qui attrappe 7, qui étant *up* attrappe un nouveau *ter* qui est 15, etc.

La méthodologie de l'algèbre romanesque, en tant que géométrie algébrique sur des intersections d'arbres n-aires, peut être étendue à bien d'autres domaines : théorie des nombres, arithmétique modulaire, systèmes dynamiques discrets, équations diophantiennes... Au delà, ses intuitions fondamentales sont aussi transposables à certains systèmes dynamiques continus, et pourraient être formalisées rigoureusement en ce sens. En particulier, si l'algèbre Romanesque d'une dynamique chaotique discrète sur \mathbb{N} invoque $2^{\mathbb{N}}$ qui a la puissance du continu, l'algèbre Romanesque d'une dynamique chaotique continue sur \mathbb{C} invoquera $2^{\mathbb{C}}$ qui a la puissance suivant celle du continu dans un cadre où l'on fixe que l'Hypothèse du Continu est vraie. Ce $2^{\mathbb{C}}$ pourra se représenter comme l'arbre binaire complet sur \mathbb{C} , dont chaque branche est une succession discrète mais infinie de nombres complexes. Au delà, le choix des opérations fondamentales déterminant ces branches ou la dynamique sur elle (par exemple l'itération de Mandelbrot $m(x) = x^2 + c$) ne devrait évidemment pas se réduire à la paire binaire fondamentale $\{ \cdot 2; \cdot 2 + 1 \}$ par laquelle ce travail a commencé. Pour étudier une dynamique chaotique dans la puissance du continu, on peut couvrir \mathbb{C} des arbres que l'on veut, donc dont les branches sont caractérisés par la succession des opérations que l'on veut, pour y produire le nouveau système de coordonnées que l'on a exploité ici, et que l'on a appelé **géométrie algébrique romanesque**, et dont l'idée bien sûr est d'aller au delà de l'algèbre géométrique cartésienne classique : **on n'utilise plus un repère cartésien mais un "quadrillage"⁵ déterminé par des intersections d'arbres, que l'on appelle un Romanesco ou repère romanesque** et dans lequel des propriétés géométriques et graphiques s'expriment algébriquement et vice-versa. C'est dans le contexte de l'extension de la géométrie algébrique aux systèmes dynamiques continus que les opérateurs \mathfrak{D}_y^x , que l'on a utilisés ici plus simplement dans les termes "verticalité", "successalité", "ternarité", etc. deviendront abstraits au point qu'on les utilisera directement plutôt que de les exprimer en français dans le texte, comme on s'y est cantonné dans ce travail. **Ils sont en quelque sorte au repère romanesque ce que les dérivées partielles sont au repère cartésien.**

La présentation anticipée de ces opérateurs avec la notation plus généralisable \mathfrak{D}_y^x , même si ce travail aurait donc pu les appeler uniquement par leurs termes intuitifs, tient justement, non pas à un surplus d'abscondité, mais à souligner au lecteur tout l'intérêt ultérieur de les étendre dans le continu et en particulier dans les complexes.

5 Remerciements

Ce travail est curieusement issu d'une réflexion qui n'a rien à voir avec le problème de Syracuse, sur l'excellent travail de Solomon Feferman "Is the continuum hypothesis a definite mathematical problem" posant en quelque sorte la question de la "mathématicité" de l'Hypothèse du Continu (HC). Si Gödel et Cohen ont démontré que HC et $\neg HC$ étaient indépendants de ZFC , Feferman pose logiquement la question de sa nature métamathématique. L'attention de l'auteur a été portée sur ce travail parce qu'il fut invité par Solomon Feferman comme Visiting Scholar du département de mathématiques de l'Université de Stanford en 2006-2007, à un poste de travail anecdotiquement en face de l'entrée du bureau de Paul Cohen. Au delà de l'anecdote, le point de vue de l'auteur est que puisqu' HC est indépendante de ZFC , on peut concevoir des théories des ensembles Cantoriennes et non-Cantoriennes, des théories où est défini un infini fractionnaire supérieur à celui de \mathbb{N} mais inférieur à celui de \mathbb{R} , et des théories où il est interdit. Dès lors l'enjeu n'est plus de démontrer ou non HC , mais d'exhiber des objets mathématiques

5. comme il est généré par des arbres et qu'il n'a rien d'orthogonal donc de "quadrille", devrait-on l'appeler *dendrillage*?

utiles et assez naturels à construire qui puissent exhiber un ensemble de cardinalité intermédiaire. L'auteur a choisi l'arbre binaire complet sur \mathbb{N} parce que s'il est formé sur les entiers, l'ensemble de ses branches construit précisément \mathbb{R} ; l'enjeu était d'exhiber une construction *utile* d'éléments de cet arbre qui amènerait un ensemble intermédiaire, et le point de départ de cette construction aura été les morphismes de branche. C'est dans ce contexte que l'auteur a découvert que la série $3n+1$ produisait des morphismes de branche dignes d'intérêt, ce qui a donné lieu à ce travail.

Physiquement et chronologiquement, ce travail a été réalisé essentiellement à San Francisco, Kiev et Berne, mais son mérite institutionnel devrait aller à part égale à l'Université de Stanford, au CS-DC Unesco-Unitwin et à l'école 42 de Fremont.

L'auteur tient à remercier F.C-A, Y.A, P.B, P.C, S.D, Solomon Feferman, Yakov Eliashberg, Syed Shariq et Gaétan Juvin *inter alia*.

6 Références

1. ABERKANE, Idriss. *On the Syracuse conjecture over the binary tree*. 2017. hal-01574521
2. BELAGA, Edward G. et MIGNOTTE, Maurice. *Walking Cautiously into the Collatz Wilderness : Algorithmically, Number-Theoretically, Randomly*. 2006.
3. BOCART, Fabian. *Inflation propensity of Collatz orbits : a new proof-of-work for blockchain applications*. Journal of Risk and Financial Management, 2018, vol. 11, no 4, p. 83.
4. BOWLING, Michael, BURCH, Neil, JOHANSON, Michael, et al. *Heads-up limit hold'em poker is solved*. Science, 2015, vol. 347, no 6218, p. 145-149.
5. FEFERMAN, Solomon. *Is the continuum hypothesis a definite mathematical problem*. Draft of paper for the lecture to the Philosophy Dept., Harvard University, 2011, p. 2011-2012.
6. HEULE, Marijn JH, KULLMANN, Oliver, et MAREK, Victor W. *Solving and verifying the boolean pythagorean triples problem via cube-and-conquer*. International Conference on Theory and Applications of Satisfiability Testing. Springer, Cham, 2016. p. 228-245.
7. TAO, Terence. *Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values*. arXiv preprint arXiv :1909.03562 (2019).