1 Théorème

$\forall x \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, Syr^k(x) = 1$

"Tous les entiers naturels convergent vers 1 dans Syracuse"

2 Matériel et Méthode (Algèbre Romanesque)

2.1 Définitions

- le "$Romanesco\{2, 3, 4\}$" sur $\mathbb{N}$ est la représentation des arbres binaire, ternaire et quaternaire sur $\mathbb{N}$, c'est-à-dire de toutes les branches issues des opérations
  - 2x
  - 2x+1
  - 3x
  - 3x+1
  - 3x+2
  - 4x+1
  - 4x+3
- $V(x) := 4x + 1$ noter que $\forall\{x, y\}$ impairs, $y = V(x) \Rightarrow x \sim y$
- $S(x) := 2x + 1$
- $G(x) := 2x - 1$
- Type A:= a+1 divisible par 3
- Type B:= b divisible par 3
- Type C:= c-1 divisible par 3
- Type A_g^n := type A, a=V(x), x pair, a $\sim 3^n x$ ou a $\sim$S($3^n x$)
- "résoudre x":= x$\sim$ 1

3 Théorèmes I : existence et diagonalité du Golden Automaton (2017)

- $\forall x, k$ impairs, $S^k V(x) \sim S^{k+1} V(x)$
- $\forall x, k$ pairs, $S^k V(x) \sim S^{k+1} V(x)$

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x$ impair non B, $3^n x \sim 1 \Rightarrow \bigwedge_{i=0}^{n} V(4^{n-i}3^i x) \sim 1$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x$ impair non B, $S(3^n x) \sim 1 \Rightarrow \bigwedge_{i=0}^{n} S(4^{n-i}3^i x) \sim 1$
- $(\forall a_g^1,\ a_g^1 \sim 1) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{N}, x \sim 1)$

  ce résultat est strictement plus puissant que celui de Tao (2019)
- $x = S^k(w)$ où $\exists y$, $w = V(y) \Rightarrow \exists$ au moins k $a_g^1 \sim x$
- $\forall x$ impair non B, $A_g \sim 1$, $Ag = G(3^n x) \Rightarrow \bigwedge_{i=0}^{n} S^i(G(3^{n-i}x)) \sim 1$

4 Théorèmes II : Densité exclusive du Golden Automaton (2020)

- Résoudre les $V(a_g^1)$ résout Syracuse ou de façon équivalente prouver que
  $\forall x \in 3 \cdot (\overline{3\mathbb{N}})$, $x \sim 1 \wedge \forall x \in 4 \cdot (3 \cdot (\overline{3\mathbb{N}})) + 3$, $x \sim 1$
  résout Syracuse
  - Les $V(a_g^1)$ pouvant s'écrire comme $V(S(4x))$ occupent la séquence

    $165 \xrightarrow{+192} 357 \xrightarrow{+192} 549 \xrightarrow{+192} ...$
  - Les $V(a_g^1)$ pouvant s'écrire comme $V^2 4x$ occupent la séquence

    $69 \xrightarrow{+384} 453 \xrightarrow{+384} 837 \xrightarrow{+384} ...$
  - On peut donc écrire la séquence des $V(a_g^1)$ comme

    $69 \xrightarrow{+96} 165 \xrightarrow{+192} 357 \xrightarrow{+96} 453 \xrightarrow{+96} 549 \xrightarrow{+192} 741 \xrightarrow{+96} 837 \xrightarrow{+96} 933 \xrightarrow{+192} ...$

    On appellera cette séquence "Déterminant de Syracuse" et on la notera
    $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to ...$

    Où les nombres divisibles par 3 représentent les $V(a_g^1)$ pouvant s'écrire comme $V^2 4x$ et les autres les $V(a_g^1)$ pouvant s'écrire comme $V(S(4x))$
- Pour tout segment de cinq éléments consécutifs du Déterminant de Syracuse le Golden Automaton en résout au moins trois.
- Pour qu'une série divergente existe elle doit occuper une infinité de segments croissants finis sur le Déterminant de Syracuse, de plus son bassin d'attraction ne peut être constitué que d'une infinité de séries divergentes.

- Le bassin d'attraction de tout cycle non trivial ne peut être constitué que d'une infinité de séries divergentes.
- La place qu'occupe le Golden Automaton sur le déterminant de Syracuse n'autorise ni l'existence d'une seule série divergente, ni l'existence d'un seul cycle non trivial.
- Le Golden Automaton peut prouver la convergence de n'importe quel entier en temps fini $\square$